7. gyakorlat

7.1. Feladat: (HN 42A-7) Az emberi szem kb. 555 nm hullámhossznál a Iegnagyobb érzékenységű. Adjuk meg annak a fekete testnek a hőmérsékletét, amely sugárzásának a spektrális teljesitménye ezen a hullámhosszon a maximális!

Megoldás: Wien törvénye:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,8977721 \cdot 10^{-3}\, K\, m, \tag{7.1.1}$$

ahonnan

$$T = \frac{2,8977721 \cdot 10^{-3}}{555 \cdot 10^{-9}} = 5221\, K. \tag{7.1.2}$$

7.2. Feladat: (HN 42A-15) A nátrium kilépési munkája 2,75 eV. Adjuk meg a fotoelektromos hatás küszöbhullámhosszát Na esetére!

Megoldás: Az Einstein–képlet szerint

$$h \cdot \nu = W + E_{kin} = W + \frac{1}{2} m\, v^2. \tag{7.2.1}$$

A küszöbhullámhossz esetén a kilépő elektronok kinetikus energiája nulla

$$h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = W \tag{7.2.2}$$

$$\lambda = \frac{h\,c}{W} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} J\, s \cdot 2,998 \cdot 10^{8}\, m/s}{2,75 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} J} \tag{7.2.3}$$

$$\lambda = \underline{4,509 \cdot 10^{-7} m}. \tag{7.2.4}$$

7.3. Feladat: (HN 42B-22) Egy gamma–foton, melynek energiája az elektron nyugalmi energiájával (511 kev) egyenlő, összeütközik egy elektronnal, ami kezdetben nyugalomban volt. Számitsuk ki, mekkora mozgási energiát nyer az elektron az ütközésben, ha a foton az eredeti pályaegyeneséhez képest 30^o-os szögben szóródik!

Megoldás: A feladatban leírt folyamat a Compton effektus, amelynek képlete

$$\Delta\,\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_{Compton}\,(1 - \cos\theta), \tag{7.3.1}$$

ahol

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e\, c} = 2,43 \cdot 10^{-12}\, m \tag{7.3.2}$$

z elektron Compton hullámhossza. Behelyettesítve

$$\begin{aligned}
\lambda' - \lambda &= 2,43 \cdot 10^{-12}\, m\, (1 - cos30^o) = \\
&= 2,43 \cdot 10^{-12}\, (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \\
&= 3,251 \cdot 10^{-13} m \\
\lambda' &= \lambda + 3,251 \cdot 10^{-13} m. \qquad (7.3.3)
\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a foton kezdeti energiája

$$\varepsilon_{foton} = h\,\nu = h\,\frac{c}{\lambda} = 511 \cdot 10^3\, eV = 511 \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 8,187 \cdot 10^{-14} J,$$

ahonnan $\lambda = 2,426 \cdot 10^{-12}\, m$. Mivel a kimenő foton hullámhossza nagyobb, energiája kisebb lesz és ez az energiacsökkenés lesz egyenlő az elektron kinetikus energiájának növekedésével. Mivel kezdetben az elektron nyugalomban volt ez egyúttal a teljes mozgási energiája is lesz

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{foton} &= \frac{h\,c}{\lambda'} = \frac{1,987 \cdot 10^{-25}}{2,751 \cdot 10^{-12}} = 7,220 \cdot 10^{-14} J = 450,6\, keV \\
\varepsilon_{kin} &= -(\varepsilon'_{foton} - \varepsilon_{foton}) = 9,674 \cdot 10^{-15} J = 60,38\, keV. \qquad (7.3.4)
\end{aligned}$$

7.4. Feladat: (HN 43A-12) Egy mozgó neutron de Broglie-bullámhossza 0,2 nm. Adjuk meg a neutron sebességét és a mozgási energiáját eV egységekben!

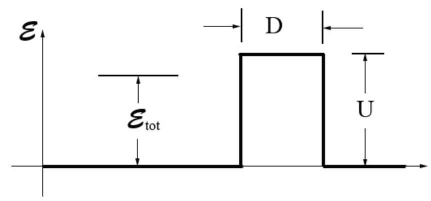
Megoldás: A de Broglie képlet szerint

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v} \\
v &= \frac{h}{m_n\,\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 1981\,\frac{m}{s} \\
\varepsilon_{kin} &= \frac{1}{2} m_n\, v^2 = 3,281 \cdot 10^{-21}\, J = 2,048 \cdot 10^{-2}\, eV. \qquad (7.4.1)
\end{aligned}$$

7.5. Feladat: (HN 43B-23) A T áteresztési tényező azt adja meg, mekkora a valószinűsége annak, hogy egy m tömegű részecske a 24. ábrán bemutatott derékszögű potenciálfalhoz közeledve „átalagútazik" a potenciálfalon

$$T = e^{-2\,k\,D}, \qquad \text{ahol } k = \sqrt{\frac{8\,\pi^2\, m_e\, (U - \varepsilon)}{h^2}}. \qquad (7.5.1)$$

Vizsgáljunk olyan potenciálfalat, melyre $U = 5\, eV$ és $D = 950\, pm$ (pikométer). Tegyük fel, hogy egy E= 4,5 eV energiája elektron közeledik a potenciálfalhoz. Klasszikusan az elektron nem képes áthaladni a potenciálfalon, mert $E < U$. A kvantummechaníka



24. ábra. A 43B-23 feladathoz

szerint azonban véges valószinűsége van az átalagútozásnak. Számitsuk ki ezt a valószínűséget!

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
k &= \sqrt{\frac{8\,\pi^2\,9,109\cdot 10^{-31}\,(5-4,5)\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{(6.626\cdot 10^{-34})^2}} \\
&= 3.623\cdot 10^9\,\frac{1}{m} \qquad (7.5.2)\\
T &= e^{-2\,3.623\cdot 10^9\,950\cdot 10^{-12}} = \underline{1.025\cdot 10^{-3}} \qquad (7.5.3)
\end{aligned}
$$

7.6. Feladat: (HN 43B-28) Egy atomot az 1,8 eV energiával az alapállapot fölötti szintre gerjesztve, az atom ott átlagosan $2\cdot 10^{-6}$ s időt tölt el, mielött alapállapotba kerülne vissza.
(a) Adjuk meg a kibocsátott foton frekvencíáját!
(b) Adjuk meg a foton hullámhosszát!
(c) Adjuk meg a foton energiájának bizonytalanságát!

Megoldás:
(a) Az alapállapotba visszatérés során kibocsátott foton frekvenciája

$$
\nu = \frac{E}{h} = \frac{1,8\cdot 1,602\cdot 10^{-19}\,J}{6,626\cdot 10^{-34}\,J\,s} = 4,352\cdot 10^{14} Hz \qquad (7.6.1)
$$

(b) és hullámhossza

$$
\lambda = \frac{c}{\nu} = 6,888\cdot 10^{-7}\,m. \qquad (7.6.2)
$$

(c) Egy adott állapot $\Delta\,E$ energiabizonytalansága és az adott állapotban tartozkodás $\Delta\,t$ időtartama között is fennáll egy határozatlansági összefüggés:

$$
\Delta\,E\cdot\Delta\,t \geq \hbar \qquad (7.6.3)
$$

$$
\Delta\,E \geq \frac{\hbar}{\Delta\,t} = 5,27286\cdot 10^{-29}\,J = 3,29106\cdot 10^{-10}\,eV. \qquad (7.6.4)
$$

7.7. Feladat: (HN 43C-33) Amikor egy atom fotont bocsát ki, az energia valamilyen hányada az atom visszalökődésére fordítódik. Mutassuk meg, hogy ez a hányad közelítőleg $\frac{\varepsilon}{2\,m\,c^2}$, ahol ε az átmenet energiája és m az atom tömege.

Megoldás: A feladat szerint a keletkező fotonok ε_{foton} energiája kisebb lesz, mint az átmenet energiája. Jelöljük a kettő különbségét $\delta\,\varepsilon$! Igazolnunk kell, hogy

$$\frac{\delta\,\varepsilon}{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon - \varepsilon_{foton}}{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{2\,m\,c^2}$$

ahol, mivel $\varepsilon << m\,c^2$, a feladat állítása szerint ε és ε_{foton} csak kicsit különbözhet egymástól

$$\delta\,\varepsilon << \varepsilon \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\delta\,\varepsilon}{\varepsilon} << 1.$$

Használjuk az energia és impulzusmegmaradás feltételeit! A ε energiájú átmenet során az energia és az impulzus megmarad, vagyis

$$\begin{aligned} p_{atom} + p_{foton} &= p'_{atom} + p'_{foton} && (7.7.1)\\ \varepsilon_{atom} + \varepsilon_{foton} &= \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} && (7.7.2)\\ & && (7.7.3) \end{aligned}$$

Maradjunk az emisszió előtt nyugalomban levő atom vonatkoztatási rendszerében. Ekkor az impulzusokra

$$\begin{aligned} p_{atom} &= p_{foton} = 0 && (7.7.4)\\ p'_{atom} &= p'_{foton},\ \text{és mivel} && (7.7.5)\\ p'_{foton} &= \frac{\varepsilon_{foton}}{c} && (7.7.6)\\ p'_{atom} &= 0 - p'_{foton} = -\frac{\varepsilon_{foton}}{c} && (7.7.7) \end{aligned}$$

Innentől mind klasszikus, mind relativisztikus módon megoldhatjuk a feladatot. Figyelembe véve, hogy a visszalökődő atom sebessége sokkal kisebb, mint a fénysebesség ezen a szinten elegendő a klasszikus fizikai megoldás.

Klasszikus fizikai (nem relativisztikus) megoldás

Válasszuk az atom alapállapotbeli energiáját nullának! A kibocsátott foton ε_{foton} energiája a visszalökődés miatti energiaveszteség következtében nem azonos az energiaszintek ε távolságával. (7.7.1) és (7.7.2) -be a foton $p_{foton} = \frac{\varepsilon}{c}$ és az atom impulzusának klasszikus fizikai $p = m\,v$ formuláit behelyettesítve

$$\begin{aligned} 0 &= m\,v + \frac{\varepsilon_{foton}}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\varepsilon_{foton}}{c} = -m\,v & (7.7.8) \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \varepsilon_{foton}, \text{ és mivel} \\ \frac{1}{2}m\,v^2 &= \frac{1}{2\,m}\cdot (m\,v)^2 = \frac{1}{2\,m}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{c}\right)^2 \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon_{foton}^2}{2mc^2} + \varepsilon_{foton} & (7.7.9) \end{aligned}$$

Az egyenlet jobboldalán az $\varepsilon_{foton} = (\varepsilon - \delta\,\varepsilon)$ ismeretlen fotonenergia szerepel. Vagyis

$$\begin{aligned} \delta\,\varepsilon &= \varepsilon - \varepsilon_{foton} = \frac{\varepsilon_{foton}^2}{2mc^2} = \frac{(\varepsilon - \delta\,\varepsilon)^2}{2mc^2} \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} - \frac{2\,\delta\,\varepsilon\cdot\varepsilon}{2mc^2} + \frac{\delta\,\varepsilon^2}{2mc^2} \approx \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} & (7.7.10) \end{aligned}$$

Ez az az energia rész, ami az atom visszalökődésére fordítódik, vagyis a foton energiája ennyivel kisebb lesz. Ezért

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_{foton}}{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{2\,m\,c^2}. \tag{7.7.11}$$

Ezzel az állítást igazoltuk[14].

7.8. Feladat: (HN 44C-36) Mi a valószínűsége annak, hogy az ls-állapotú hidrogén elektronját a magtól 2,50 a_o-nál nagyobb távolságra találjuk meg?

Megoldás: Az 1s állapotbeli gömbszimmetrikus hullámfüggvény szorzat alakban írható (*szeparálható*): $\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\cdot\ y(\vartheta,\varphi)$, ennek radiális és szögfüggő része

$$\begin{aligned} R(r) &= 2\left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2}\cdot e^{-r/a_o} & (7.8.1) \\ Y(\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} & (7.8.2) \end{aligned}$$

A teljes hullámfüggvény az 1s állapotban csak a távolságtól függ:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_o^3}}\,e^{-r/a} \tag{7.8.3}$$

[14]Szilárd testekben a képletbe helyettesítendő tömeg az atomok kölcsönhatása miatt nem feltétlen azonos a szabad atom tömegével, lehet annál nagyobb, kisebb, sőt akár végtelen is. Ezt a tömeget az atom *effektív tömeg*ének nevezzük. Ezt a Mössbauer-effektust használjuk ki pl. a meteorok és holdkőzetek analízisére a Mössbauer-spektroszkópiában.

Annak a valószínűsége, hogy az elektront a magtól r' -nél nagyobb távolságra találjuk

$$\mathcal{P}(r',\infty) = \int_{r'}^{\infty} |\psi(r)|^2 \cdot 4\,\pi\, r^2\, dr = = \frac{4}{a_o^3} \int_{r'}^{\infty} r^2 \cdot e^{-2\,r/a_o}\, dr. \tag{7.8.4}$$

Integráltáblázatból kinézve az integrál értékét[15]

$$\mathcal{P}(r') \equiv \mathcal{P}(r',\infty) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\,r'}{a_o} \right)^2 + \frac{2\,r'}{a_o} + 1 \right) e^{-\frac{2\,r'}{a_o}} \tag{7.8.9}$$

Behelyettesítve az $r' = 2,50\,a_o$ értéket[16]: $\dfrac{2\,r'}{a_o} = 5.00$

$$\mathcal{P}(r') = \left(\frac{1}{2}\, 5.00^2 + 5.00 + 1 \right) e^{-5.00} = 0.125 \tag{7.8.10}$$

Házi feladat (gyakorlásra):
42/ 6, 7, 12, 17, 19, 20, 25, 33, 44
43/ 4, 8, 11, 20, 24, 25, 27
44/ 7, 8, 12, 22, 24, 26

[15]Ez az integrál integráltáblázat nélkül két egymás utáni parciális integrálás alkalmazásával könnyen kiszámolható:
Ehhez egy kis segítség: Vezessünk be egy új változót (7.8.4)-be! Legyen $x = \dfrac{2\,r}{a_0}$, ekkor $r = \dfrac{a_0\,x}{2}$ és $dr = \dfrac{a_0}{2}\,dx$, az integrálás határai pedig $\dfrac{2\,r'}{a_0}$ és ∞:

$$\frac{4}{a_o^3} \int_{r'}^{\infty} r^2 \cdot e^{-2\,r/a_o}\, dr = \frac{4}{a_o^3} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} \frac{a_o^2}{4} x^2 \cdot e^{-x}\, \frac{a_o}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2\, e^{-x} dx \tag{7.8.5}$$

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx. \tag{7.8.6}$$

Először legyen $u' \equiv e^{-x}$,és $v \equiv \dfrac{1}{2}\, x^2$, ekkor $u = -e^{-x}$ és $v' = x$

$$\frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}\, x^2\, e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x\,(-e^{-x})\, dx \tag{7.8.7}$$

A jobboldali integrál ugyancsak parciálisan integrálható. Most $u' \equiv -e^{-x}$,és $v \equiv x$, ahonnan $u = e^{-x}$ és $v' = 1$.

$$\int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x\,(-e^{-x})\, dx = \left[x\, e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \left[-x\, e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \left[-e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} \tag{7.8.8}$$

A végeredmény:

$$\frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2\, e^{-x} dx = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\,r'}{a_o} \right)^2 + \frac{2\,r'}{a_o} + 1 \right) e^{-\frac{2\,r'}{a_o}}$$

[16] $a_o = 0,0529\,nm$