3. gyakorlat

3.1. Feladat: (HN 27A-12) Becsüljük meg azt a legnagyobb potenciált, amelyre egy 10 cm átmérőjű fémgömböt fel lehet tölteni, anélkül, hogy a térerősség értéke meghaladná a környező száraz levegő dielektromos átütési szilárdságát.

Megoldás: A feltöltött R sugarú fémgömb felületén a térerősség és a potenciál pontosan akkora, mintha a teljes töltése a középpontjában lenne:

$$E(R) = K\frac{Q}{R^2} \tag{3.1.1}$$

$$|\Phi(R)| = K\frac{Q}{R} = E(R)\cdot R \tag{3.1.2}$$

A száraz levegő dielektromos átütési szilárdsága $E_0 = 3\,10^6 \frac{V}{m}$. Innen $|\Phi(R)| = E_0 \cdot R = 3\cdot 10^6 \cdot 0,05 = 1,5\cdot 10^5 V$.

3.2. Feladat: (HN 27B-20) Egy 0,1 μF kapacitású síkkondenzátor lemezei 0,75 m^2 területűek, a szigetelő réteg dielektromos állandója 2,5. A kondenzátort 600 V-os feszültségre töltjük fel.
(a) Számítsuk ki a lemezek töltését.
(b) Számítsuk ki a szigetelő réteg felületén indukált töltéssűrűséget.
(c) Számítsuk ki a szigetelő rétegben az elektromos térerősséget.

Megoldás: Adatok: C = 0,1 μF; A = 0,75 m^2; ε_r = 2,5; U = 600 V.
(a) A kondenzátor töltése

$$Q = CU = 6\cdot 10^{-5} C. \tag{3.2.1}$$

(b) A σ szabad töltések sűrűsége:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 8\cdot 10^{-5}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}, \tag{3.2.2}$$

a σ töltéssűrűség által létrehozott elektromos térerősség

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{3.2.3}$$

Jelölje σ' az indukált töltéssűrűséget. Az ezáltal keletkezett – az őt létrehozó térrel ellentétes – elektromos tér

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \tag{3.2.4}$$

E kettő összege adja a dielektrikumbeli teret, amellyel a

$$E + E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = E_r \tag{3.2.5}$$

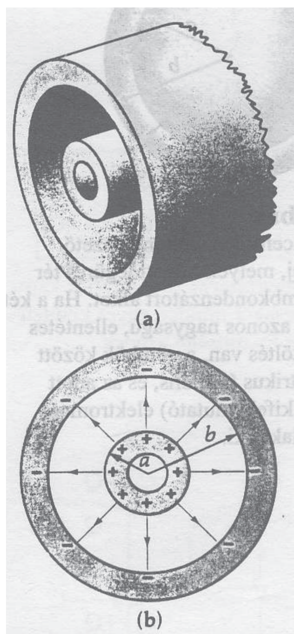
egyenlet írható fel. Ebből az indukált töltéssűrűség

$$\sigma' = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\sigma = -4,8\cdot 10^{-5}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}. \tag{3.2.6}$$

(c) A lemezek közötti térerősség

$$E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = 3,614\cdot 10^{6}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \tag{3.2.7}$$

3.3. Feladat: (HN 27-3p) A hengerkondenzátor két koaxiális vezető hengerből áll (ld. 11 ábra). A belső hengeres vezető külső sugara a, a külső vezető belső sugara b. Tételezzük fel, hogy a vezetők L hossza nagyon nagy a sugarakhoz képest , igy a végeken történő szórt tér hatása elhanyagolható. Legyen a belső hengeres vezetőn $+\sigma$ töltéssűrűség. A Gauss-törvény segítségével határozzuk meg a



11. ábra. A 27-3p feladathoz

(a) a kondenzátoron belüli elektromos térerősséget, ha vákuum tölti ki a teret, illetve ha ϵ_r dielektromos állandójú szigetelő,
(b) a kondenzátor fegyverzetei közötti elektromos feszültséget,
(c) a kondenzátor kapacitását.

Megoldás:
(a) Tekintsünk az a és b sugarak közötti r sugarú koncentrikus kört és ezen számoljuk ki a térerősséget. A Gauss-törvény alakja vákuum esetén

$$\int_A \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_A \sigma \mathrm{d}A, \tag{3.3.1}$$

amely a mostani feladatban az

$$E(r) \cdot 2r\pi L = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \cdot 2a\pi L \tag{3.3.2}$$

alakban írható. A jobboldalon lévő

$$Q = \sigma \cdot 2a\pi L \tag{3.3.3}$$

a hengerkondenzátoron lévő elektromos töltés. Behelyettesítés után elektromos térerősség

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}. \tag{3.3.4}$$

Az ϵ_r dielektromos állandójú szigetelő ϵ_r arányban csökkenti az eredő elektromos teret (elektromos feszültséget). Ebben az esetben a szigetelőbeli térerősség

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\frac{a}{r}. \tag{3.3.5}$$

(b) Az a és b hengeres vezetők közötti elektromos potenciálkülönbség rögtön a szigetelővel kitöltött tartományra

$$U = U_a - U_b = -\int_b^a E(r)\mathrm{d}r = -\int_b^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\frac{a}{r}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} a \ln\frac{b}{a}. \tag{3.3.6}$$

(c) A hengerkondenzátor kapacitását a

$$Q = CU \tag{3.3.7}$$

összefüggés segítségével számolhatjuak ki. Behelyettesítés után a

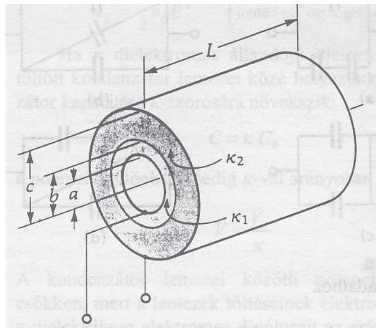
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{b}{a}} \tag{3.3.8}$$

kapacitás adódik.

3.4. Feladat: (HN 27B-21) Tekintsünk egy hengeres kondenzátort, melyben a belső és külső hengerek között két réteg szigetelő anyag van (lásd 12 ábra). Elhanyagolva a szélek hatását, határozzuk meg, hogy C kapacitása miként függ az ábrán megadott paraméterektől.

Megoldás: A megoldás során használjuk fel az előző feladatban kapott eredményeket. (Az 12 ábra adatait jelöljük át: $\kappa_1 = \varepsilon_1$ ill. $\kappa_2 = \varepsilon_2$.) Az elektromos tér eredője az egyes tartományokban

$$E_1(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}\frac{a}{r} \quad (a < r < b), \tag{3.4.1}$$



12. ábra.

illetve

$$E_2(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} \frac{a}{r} \quad (b < r < c). \tag{3.4.2}$$

A potenciálkülönbség a fegyverzetek között

$$\begin{aligned} U &= U_a - U_c = (U_a - U_b) + (U_b - U_c) = -\int_b^a E_1(r)\mathrm{d}r - \int_c^b E_2(r)\mathrm{d}r \\ &= -\int_b^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{a}{r}\mathrm{d}r - \int_c^b \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{a}{r}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1} a \ln\frac{b}{a} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2} a \ln\frac{c}{b}. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

A hengerkondenzátoron lévő elektromos töltés

$$Q = \sigma \cdot 2a\pi L. \tag{3.4.4}$$

A kifejezéseket összevetve kondenzátor kapacitására

$$C = 2\pi\varepsilon_0 L \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \ln\frac{c}{b} + \varepsilon_2 \ln\frac{b}{a}}. \tag{3.4.5}$$

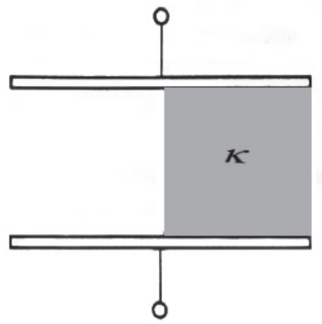
3.5. Feladat: (HN 27C-36) Egy κ dielektromos állandójú szigetelő réteg egy sikkondenzátor lemezei közötti teret a 13 ábrán vázolt módon csak félig tölt ki. Adjuk meg, hogy a teljes energia hányadrésze tárolódik a szigetelő rétegben.

Megoldás: Két megoldást is adunk:
1) Ez az elrendezés két párhuzamosan kapcsolt kondenzátornak felel meg. Ezek kapacitásai:

$$C_1 = \varepsilon_o \frac{A}{2d}, \qquad C_2 = \kappa\varepsilon_o \frac{A}{2d},$$

ahol A a kondenzátor lemezeinek felülete és d a lemezek távolsága. Így

$$C_2 = \kappa C_1$$



13. ábra. 27C-36 feladathoz

A kondenzátorok párhuzamosan vannak kapcsolva ezért a rajtuk levő feszültség ugyanakkora, a bennük tárolt energia pedig

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2, \text{ ill. } \quad \frac{1}{2} C_2 U^2$$

Az összenergia e két energia összege, ezért a szigetelőt tartalmazó kondenzátor energiájának (a szigetelőben tárolt energiának) γ aránya az összenergiához képest:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{1}{2} C_2 U^2}{\frac{1}{2} C_1 U^2 + \frac{1}{2} C_2 U^2} \\ &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\kappa}{1+\kappa} \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

2) Az elektrosztatikus térben tárolt energia sűrűségét az

$$w = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 E^2$$

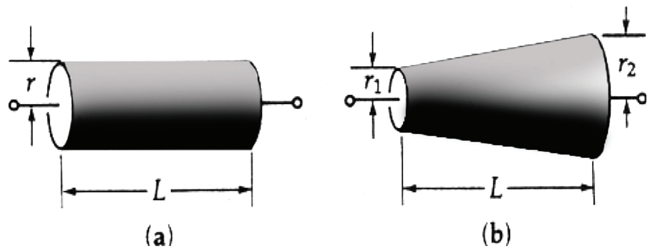
képlet adja meg. Az ábra szerinti elrendezésben az elektródák ekvipotenciális felületek, a töltéssűrűség konstans. A térerősség merőleges a kondenzátor lemezeire és párhuzamos a betolt szigetelő hasáb oldalával, ezért az anyagban és a vákuumban ugyanakkora. Tehát az egyes tartományokban az energiasűrűség:

$$w_v = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

$$w_a = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 E^2 = \kappa w_v$$

Mivel a kondenzátor lemezek közötti tér fele van anyaggal kitöltve a tárolt energiák aránya megegyezik az energiasűrűségek arányával, tehát

$$\gamma = \frac{w_a}{w_a + w_v} = \frac{\kappa}{1+\kappa}. \tag{3.5.2}$$



14. ábra. 28C-41 feladathoz

3.6. Feladat: (HN 28C-41) A 14 ábrán két, azonos anyagból gyártott ellenállás látható. A véglapokat vezető réteggel vonták be. Tételezzük fel, hogy az ellenállások belsejében az áramsűrűség bármely, a tengelyre merőleges síkmetszet mentén állandó nagyságú. Mutassuk meg, bogy a két ellenállás azonos nagyságú, ha a henger r sugara egyenlő a csonkakúp r_1, és r_2 sugarának mértani közepével, azaz $r' = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. Útmutatás: a R ellenállás nagyságának kiszámításakor számítsuk ki a tengelyszimmetrikus, dx vastagságú, $r(x) = r_1 + (r_2 - r_1) \cdot x/L$ sugarú vékony körlemezek átellenes lapjai közötti dR ellenállást. A teljes ellenállást ezen elemi ellenállások segítségével, integrálassal kaphatjuk meg.)

Megoldás: Osszuk fel a csonkakúp alakú ellenállást párhuzamos dx vastagságú rétegekre! Egy ilyen, az r_1 sugarú, a fedőlaptól x távolságra levő korong sugara, felülete, illetve ellenállása

$$\begin{aligned} r(x) &= r_1 + \frac{(r_2 - r_1) \cdot x}{L} \\ A(x) &= r^2(x) \cdot \pi \\ dR(x) &= \rho \cdot \frac{dx}{A(x)} = \rho \cdot \frac{dx}{r^2(x)\pi} \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

A teljes ellenállás ezért

$$R = \rho \cdot \int_0^L \frac{dx}{r^2(x)} \tag{3.6.2}$$

A legegyszerűbben akkor járunk el, ha az x szerinti integrálásról áttérünk az $r(x)$ szerinti integrálásra. (3.6.1) alapján

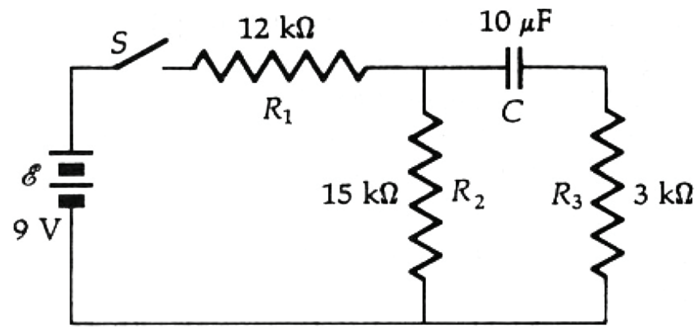
$$dr = d\left(r_1 + \frac{(r_2 - r_1) \cdot x}{L}\right) = \frac{r_2 - r_1}{L} \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{L}{r_2 - r_1} dr$$

ezért

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{\rho \cdot L}{\pi\,(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \tfrac{dr}{r^2} = \\ &= \tfrac{\rho \cdot L}{\pi\,(r_2 - r_1)} \left[-\tfrac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \tfrac{\rho \cdot L}{\pi\,(r_2 - r_1)} \left(\tfrac{1}{r_1} - \tfrac{1}{r_2}\right) = \\ &= \tfrac{\rho \cdot L}{\pi\,(r_2 - r_1)} \left(\tfrac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}\right) = \\ &= \tfrac{\rho \cdot L}{\pi\, r_2 \cdot r_1} \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

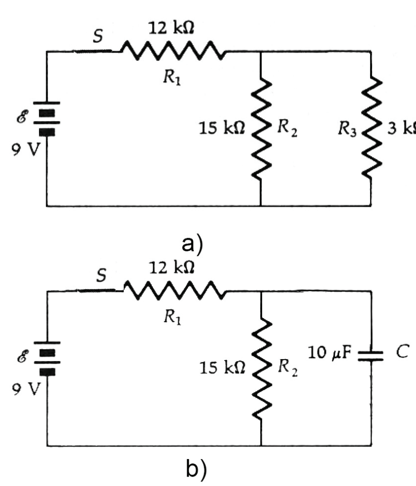
Ez viszont valóban megegyezik egy olyan egyenes henger alakú rúd ellenállásával, amelynek sugara $r' = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$.

3.7. Feladat: (HN 29C-62) Tekintsük a 3 áramkört. Kezdetben a kondenzátoron



nincs töltés; a $t = 0$ időponthan az S kapcsolót zárjuk.
(a) Készítsünk táblázatot, amely az egyes áramköri elemeken folyó áramerősségek (i_{12}, i_{15} és i_c) és a rajtuk létrejövô feszültségesések (u_{12}, u_{15}, és u_c) kezdeti (közvetlenül t = 0 utáni) értékét foglalja össze.
(b) Készítsünk egy másik táblázatot is, a fenti mennyiségek stacionárius értékeivel.

Megoldás:
(a) Mielőtt a kapcsolót zárnánk a kondenzátoron nem volt feszültség. A kapcsoló zárásakor a kondenzátor feszültsége nem változhat meg ugrásszerűen, ezért továbbra is 0 marad, vagyis olyan a helyzet, mintha a kondenzátor helyett egy rövidzár lenne. Ezért a kapcsolás ebben a pillanatban ekvivalens a 15 a) ábráján láthatóval. Ennek az áram-



15. ábra. Helyettesítő kapcsolások a 15 feladathoz

körnek az ellenállása $R(t=0) = R_1 + \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 14,5\,k\Omega$ Az R_1 ellenálláson átfolyik a teljes áram, ezért

$$\begin{aligned}
i_{12} &\equiv i_{R_1} = \frac{U}{R(t=0)} = \frac{9\,V}{14.5\,k\Omega} = 6,207 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} && (3.7.1)\\
u_{12} &\equiv u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = 7.448\,\mathrm{V} && (3.7.2)\\
u_{15} &\equiv u_{R_2} = u_{R_3} = U - u_{R_1} = 1.552\,\mathrm{V} && (3.7.3)\\
i_{15} &\equiv i_{R_2} = \frac{u_{R_2}}{R_2} = 1.035 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} && (3.7.4)\\
u_c &= 0\,\mathrm{V} && (3.7.5)\\
i_c &= i_{R_3} = \frac{u_{R_3}}{R_3} = \frac{u_{R_2}}{R_3} = 5.172 \cdot 10^{-4}\mathrm{A} && (3.7.6)
\end{aligned}$$

(b) Stacionárius állapotban a kondenzátort tartalmazó ágban nem folyik áram és a kondenzátor teljesen fel van töltve, ezért a kondenzátor feszültsége megegyezik az R_2 ellenálláson eső feszültséggel (tehát az R_3 ellenállás sarkai között nincs potenciálkülönbség.) Ld. 15 b) ábra. A körben folyó áram viszont lecsökken, mert az eredő ellenállás most $R_{stac} = R_1 + R_2 = 27\,k\Omega$ és csak ezen a két ellenálláson folyik át áram.

$$\begin{aligned}
i_{12} &\equiv i_{R_1} = \tfrac{U}{R(stac)} = \tfrac{U}{R_1+R_2} = 3,333 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} && (3.7.7)\\
u_{12} &\equiv u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = 4\,\mathrm{V} && (3.7.8)\\
u_{15} &\equiv u_{R_2} = U - u_{R_1} = 5\,\mathrm{V} && (3.7.9)\\
i_{15} &\equiv i_{R_2} = i_{R_1} = 3,333 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} && (3.7.10)\\
u_c &= u_{15} = 6\,\mathrm{V} && (3.7.11)\\
i_c &= 0\,\mathrm{A} && (3.7.12)
\end{aligned}$$

Házi feladat (gyakorlásra):
27/ 3, 7, 8, 9, 21, 24, 27, 33, 37, 41
28/ 3, 4, 16, 45, 46
29/ 34, 36, 37, 42, 63