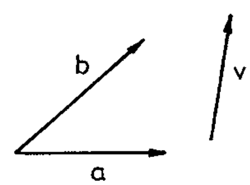
Vektorok

Vektoron irányított szakaszt értünk.

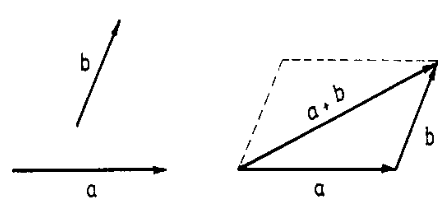
A definíció értelmében tehát a vektort akkor ismerjük, ha ismerjük a hosszát és az irányát. A **vektort** kövér kis betűkkel (**a**, **b** stb.) jelöljük, megkülönböztetve az a, b számoktól, amelyeket **skalároknak** (skaláris mennyiségeknek) nevezünk.
A vektor **abszolút értéke** az irányított szakasz hossza. Az **a** vektor abszolút értékének jelölése: $|\mathbf{a}|$.



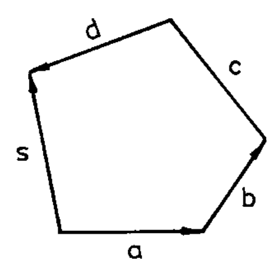
Ha a vektor hossza egységnyi, akkor **egységvektornak** nevezzük. Jelölése: $\mathbf{a}^0$, $\mathbf{b}^0$.
Nullvektor (zérusvektor) az olyan vektor, amelynek a hossza nulla. Jele: **0**.
Két vektort **egyenlőnek** tekintünk, ha párhuzamos eltolással egymásba átvihetők (fedésbe hozhatók), azaz, ha az eltolás után kezdőpontjuk és végpontjuk is egybeesik.

Műveletek vektorokkal

Az **a** és **b** vektorok **a** + **b** összegén a következő vektort értjük: a **b** vektort eltoljuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy kezdőpontja az **a** vektor végpontjával essék egybe. Ezután az **a** vektor kezdőpontját az eltolt **b** vektor végpontjával összekötő vektort képezzük. Ez lesz az **a** + **b** vektor (paralelogramma szabály).



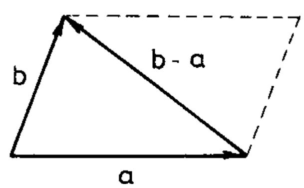
Több vektor összege pl. az ábrán átható módon képezhető: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ →



Az összeadás kommutatív és asszociatív, azaz

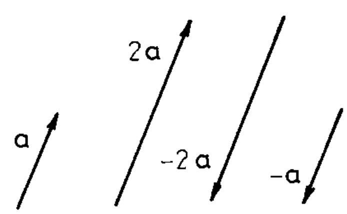
$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ és $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

Két vektor $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ **különbsége** az a vektor, amely az $\boldsymbol{a}$ végpontjából indul és a $\boldsymbol{b}$ végpontjába mutat. Tehát az $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ különbségvektor olyan vektor, amelyre $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.



Vektor szorzása számmal

Az $\boldsymbol{a}$ vektor λ-szorosán (λ valós szám) azt a $\lambda\boldsymbol{a}$-val jelölt vektort értjük, amelynek abszolút értéke $|\lambda||\boldsymbol{a}|$, iránya pedig **a** irányával egyező, ha λ pozitív, és azzal ellentétes, ha λ negatív.



Ha az $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ vektort megszorozzuk a $\lambda=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ számmal, akkor a szorzatvektor hossza egységnyi lesz. Ugyanis

$$\left|\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right|=\frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}|=1.$$

Tehát egy **vektor egységvektorát** kapjuk, ha abszolút értékével osztjuk:

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

A skaláris szorzat

Az **a** és **b** vektorok **ab**-vel jelölt **skaláris szorzata** a két vektor abszolút értékének és az általuk közrezárt szög koszinuszának a szorzata, azaz

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi,$$

ahol φ az **a** és **b** vektor által közrezárt szög. Az **a** és **b** vektor skaláris szorzatának jelölésére használatos az $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ jelölés is.

Az értelmezésből látható, hogy a skaláris szorzás eredménye egy szám (skalár). Továbbá, ha a két vektor merőleges egymásra ($\varphi = 90°$), akkor skaláris szorzatuk nulla, mert $\cos\varphi = 0$. Ennek fordítottja is igaz. Ha a két vektor skaláris szorzata nulla, akkor a két vektor egymásra merőleges.

A skaláris szorzás kommutatív és (az összeadásra nézve) disztributív:

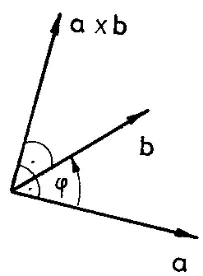
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{és} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

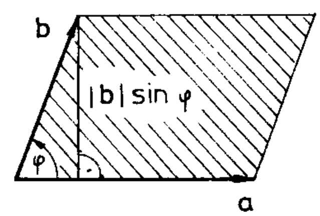
A vektoriális szorzás

Az **a** és **b** vektorok **vektoriális szorzatán** azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort értjük, amely merőleges mindkét vektorra, hossza

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi,$$

ahol φ a két vektor által közrezárt szög. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak.





Ha $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ párhuzamosak, azaz $\varphi = 0$, akkor $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 0$. Ez egyúttal azt jelenti, hogy $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, tehát két párhuzamos vektor vektoriális szorzata nullvektor. A vektoriális szorzás nem kommutatív, mert az áll fenn, hogy

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.$$

A disztributív törvény viszont érvényes, azaz

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

Megjegyzés: Az értelmezésből látszik, hogy $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ vektor hossza az $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyenlő, ahol $|\boldsymbol{a}|$ a paralelogramma alapja, $|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ a magassága.

A vegyes szorzat

Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektorok **vegyes szorzatán** az $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ szorzatot értjük, és ezt $\boldsymbol{abc}$-vel jelöljük, azaz

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

A vegyes szorzat egy skalár (szám), mert $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ is és $\mathbf{c}$ is vektor, és e két vektor skaláris szorzatát kell venni.

Vektorok koordinátás megadása – a vektor, mint számhármas

Vegyünk fel a térben egy O pontot, és e pontból kiinduló, páronként egymásra merőleges három egységvektort. Jelölje ezeket rendre $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, úgy, hogy ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkossanak, hasonlóan, ahogy a térbeli Descartes-féle koordinátarendszer *x*, *y*, *z* tengelyei. Ezek a vektorok a **bázisvektorok**. Mutasson a $\boldsymbol{v}$ vektor az O pontból a $P=(v_1,v_2,v_3)$ pontba. Ekkor $\boldsymbol{v}$ előállítható a $v_1\boldsymbol{i}$, $v_2\boldsymbol{j}$, $v_3\boldsymbol{k}$ vektorok összegeként:

$$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}.$$

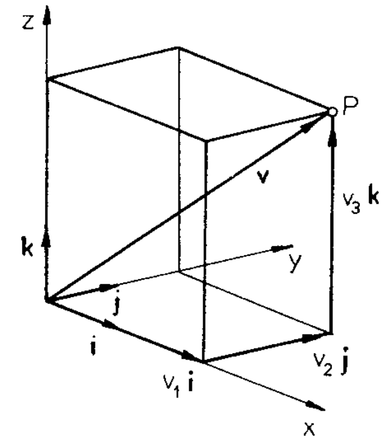
A v_1,v_2,v_3 számokat a **vektor koordinátáinak** nevezzük, pontosabban az **i**, **j**, **k** bázisra vonatkozó koordinátáinak. Így a vektort megadhatjuk koordinátáival, azaz, ha 3 adott sorrendű valós számot megadunk, akkor ez egy háromdimenziós vektort jelent. Az alábbi jelöléseket használjuk $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$. (Az $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ egység-vektorokat szokás $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ módon is jelölni.) Pl. A (2,1,4) vektor:

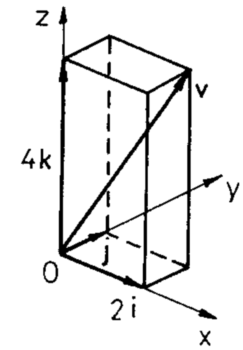
VEKTORMŰVELETEK KOORDINÁTÁKKAL

A vektor abszolút értéke

A $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ vektor **abszolút értéke**:

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\ .$$





Legyen adott a $\boldsymbol{v} = (3,1,-2)$ vektor. Számítsuk ki az abszolút értékét!
Megoldás: $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = 14.$

Vektorok egyenlősége

A koordinátás alakban megadott vektorok egyenlőségét az alábbi módon értelmezzük.
Tekintsünk két vektort

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3) \text{ és}$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3).$$

Az **a** és **b** vektorok akkor és csak akkor **egyenlők**, ha

$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3,$

azaz az azonos indexű koordinátáik egyenlők.

Vektorok összege (különbsége)

Az **a** és **b** vektorok **összege (különbsége)**:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3).$$

Két vektor összegét (különbségét) tehát úgy képezzük, hogy a megfelelő koordinátákat összeadjuk (kivonjuk).

Legyen $\boldsymbol{a} = (2,3,-1)$ és $\boldsymbol{b} = (1,-4,5)$. Számítsuk ki a két vektor összegét!
Megoldás: $a + b = (3,-1,4)$.

Skalárral való szorzás

Az **a** vektornak a λ számmal való szorzata:

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

A vektort úgy szorozzuk egy számmal, hogy mindhárom koordinátáját megszorozzuk ugyanazzal a számmal.

Legyen $\boldsymbol{a} = (2,3,1)$. Számítsuk ki $4\boldsymbol{a}$-t!

Megoldás: $4\boldsymbol{a} = (4 \cdot 2,4 \cdot 3,4 \cdot 1) = (8,12,4)$.

Az egységvektor koordinátás alakja

A skalárral való szorzással fel tudjuk írni a **v** vektor egységvektorát:

$$\mathbf{v}^0 = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{v_1}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_2}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_3}{|\mathbf{v}|}\right).$$

Írjuk fel az $\mathbf{a} = \left(-2, \sqrt{3}, 3\right)$ vektor egységvektorát.

Megoldás: Mivel $|\mathbf{a}| = \sqrt{4+3+9} = \sqrt{16} = 4$, ezért

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{4}\mathbf{a} = \frac{1}{4}\left(-2, \sqrt{3}, 3\right) = \left(-\frac{2}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Skaláris szorzat

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. A két vektor **ab** skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Két vektor skaláris szorzatát tehát úgy számíthatjuk ki, hogy a megfelelő koordináták szorzatát összeadjuk.

Megmutatjuk, hogy ez a geometriai definícióból következik. Ugyanis a skaláris szorzat értelmezése szerint

$\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$; $\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$.

Ezeket felhasználva,

$\mathbf{ab} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Legyen $\boldsymbol{a} = (6,2,1)$ és $\boldsymbol{b} = (1,-1,2)$. Számítsuk ki **ab**-t!

Megoldás. $\boldsymbol{ab} = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$.

Megjegyzés. A skaláris szorzat értelmezéséből az is kiolvasható, hogy a két vektor által közrezárt szög koszinusza:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

Ezt felhasználva, a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor x tengellyel (így az $\boldsymbol{i}$ vektorral) közrezárt szögének a koszinusza:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{vi}}{|\mathbf{v}| \cdot 1} = \frac{v_1}{|\mathbf{v}|}.$$

Ugyanígy az y ill. z tengellyel bezárt szög koszinusza:

$\cos\beta = \dfrac{v_2}{|\mathbf{v}|}$ ill. $\cos\gamma = \dfrac{v_3}{|\mathbf{v}|}$.

Ezeket az eredményeket összevetve az egységvektor koordinátás alakjával, azt kapjuk, hogy

$\mathbf{v}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Az egységvektor koordinátái tehát az ún. **iránykoszinuszok**.

Mivel $\left|\mathbf{v}^0\right| = 1 = \left|\mathbf{v}^0\right|^2$, ezért

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

A $\boldsymbol{v} = (-1,1,\sqrt{2})$ vektor egységvektora $\boldsymbol{v}^0 = \frac{1}{2}(-1,1,\sqrt{2})$. Tehát

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{2},\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Így a $\boldsymbol{v}$ vektor az *x*, *y*, *z* tengellyel közrezárt szögei rendre: 120°, 60°, 45°.

Vektoriális szorzat

Legyen $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Akkor a két vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ **vektoriális szorzata**:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k},$$

azaz

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Megmutatjuk, hogy a vektoriális szorzatnak ez a kiszámítási módja a geometriai definícióból következik.

A vektoriális szorzat értelmezése szerint:

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$,

$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k},\ \ \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i},\ \ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Ezeket felhasználva,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\
&= a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} + a_2b_3\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} = \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

A vektoriális szorzat kiszámítása a determináns segítségével

A fenti "képletet" nehéz megjegyezni, ezért az $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ vektoriális szorzatot **determináns** segítségével számítjuk ki.

Másodrendű determináns

Legyen adva az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

alakzat (táblázat, később majd mátrixnak nevezzük). Az indexek azt adják meg, hogy az elem melyik sor (első index) melyik oszlopában (második index) helyezkedik el. A táblázat elemeiből alkotott

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

kifejezéssel a táblázat determinánsát adjuk meg, és ennek jelölése

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

.

Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

determinánst!
Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14.$$

Harmadrendű determináns

A harmadrendű determináns kiszámítását visszavezetjük másodrendű determinánsok kiszámítására a következő módon:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

A megjelenő másodrendű determinánsokat úgy képezzük, hogy a harmadrendű determinánsból töröljük azt a sort és azt az oszlopot, amelyben az előttük álló elem szerepel. (Pl. Az a_{11} melletti determináns úgy jön létre, hogy kihúztuk az első sort és első oszlopot; az a_{12} melletti úgy, hogy kihúztuk az első sort és a második oszlopot – és negatív előjelet írunk –, az a_{13} mellettinél az első sort és a harmadik oszlopot.) Az így kapott másodrendű determinánsokat már ki tudjuk számítani. Lásd:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns segítségével a vektoriális szorzat a következőképpen írható fel:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Számítsuk ki az $\boldsymbol{a} = (1,3,2)$ és $\boldsymbol{b} = (2,4,1)$ vektorok vektoriális szorzatát és az általuk kifeszített paralelogramma területét!

Megoldás:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} = (-5,3,-2).$$

A két vektor által kifeszített paralelogramma területe, $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, azaz

$$T = \sqrt{38}.$$

Megjegyzés: Az $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ szorzatot **kétszeres vektoriális szorzatnak** nevezzük. Érvényes az ún. **kifejtési tétel**:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}.$$

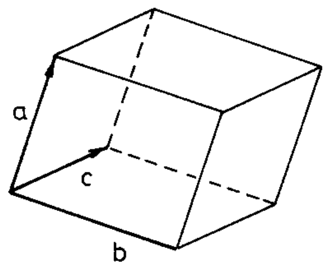
Vegyes szorzat

Legyen $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$, akkor a három vektor **vegyes szorzata** az alábbi módon számítható ki:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(Ha elvégezzük koordinátákkal az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ majd az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzást éppen azt az értéket kapjuk meg, amit a determináns ad.)

Megjegyzés: Az **abc** vegyes szorzat abszolút értéke a három vektor által kifeszített paralelepipedon (paralelogramma alapú hasáb) térfogatát adja.



Ha a vegyes szorzat értéke nulla, akkor a három vektor egy síkban van. Az értelmezésből az is következik, hogy $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$, vagyis a tényezők ciklikus cseréje esetén a vegyes szorzat értéke nem változik. Viszont két egymás melletti tényező cseréje előjelváltást eredményez, azaz $\mathbf{bac} = \mathbf{cba} = \mathbf{acb} = -\mathbf{abc}$.

Számítsuk ki az $\boldsymbol{a} = (9,8,7)$, $\boldsymbol{b} = (6,5,4)$ és $\boldsymbol{c} = (3,2,1)$ vektorok vegyes szorzatát!
Megoldás:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata tehát nulla, ezért a három vektor egy síkban van.