Kinematika

2014. szeptember 28.

1. Vonatkoztatási rendszerek, koordinátarendszerek

1.1. Vonatkoztatási rendszerek

A test mozgásának leírása kezdetén ki kell választani azt a viszonyítási rendszert, amelyből a tekintett mozgást (pl. egy eldobott) vizsgálni kívánjuk. Ez lehet a Föld felszíne, egy asztallap, amelyekre úgy tekinthetünk, mint rögzített (nem mozgó) vonatkoztatási rendszer. Ugyanezt a mozgást leírhatjuk az egyenesvonalú egyenletesen haladó villamosból, mint a Föld felszínéhez képest egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszerből. Sőt, ez a villamos akár egyenesvonalúan gyorsulhat is, a mozgás ebből e rendszerből is vizsgálható. Hasonlóképpen a kanyarodó villamosról is. Ez utóbbiak gyorsuló vonatkoztatási rendszerek.
Ahhoz, hogy a pontok, testek helyzetét egyértelműen meghatározzuk a vonatkoztatási rendszeren belül, definiálnunk kell szabadon választható, alkalmas koordinátarendszert. A mechanikai folyamatokra vonatkozó tanulmányok elején elegendő két koordinátarendszer ismerete.

1.2. Descartes-féle koordinátarenszer

A háromdimenziós Descartes-féle koordinátarendszert a jobbsodrású $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált (= ortogonális /páronként merőleges/ és normált /egységnyi hosszúságú/) bázisvektorok feszítik ki. A P pont helyzetét az $\mathbf{r}$ vektor – hely vagy helyzet vektor – adja meg, amely a bázisvektorok segítségével

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

alakban írható fel. Itt az x, y, z számhármas a P ponthoz húzott vektor komponenseit jelenti. Jelölésben nagyon gyakran az $\mathbf{r} = (x, y, z)$ látható.
A koordinátavonalakat a számhármasból úgy kapjuk, hogy kettő értékét rögzítjük, míg a harmadikat szabadon változtathatjuk. Így jutunk el három nevezetes koordináta vonalhoz – az $x, y = 0, z = 0$; és $x = 0, y, z = 0$; és $x = 0, y = 0, z$ választásokkal –, amelyeket rendre x, y és z tengelyeknek nevezünk. A három tengely a $(0,0,0)$ pontban találkozik, ezt a pontot nevezzük origónak: O.
Az origó és a P pont távolsága a Pitagorasz-tétellel számolható

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

amely egyben az $\mathbf{r}$ vektor hossza (normája): $\mid \mathbf{r} \mid = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Az $\mathbf{r}$ vektor irányába mutató egységvektor

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{\mid \mathbf{r} \mid} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{k}.$$

1.3. Síkbeli polárkoordináta-rendszer

A síkbeli polárkkordináta-rendszer bevezetéséhez vegyük a kétdimenziós Descartes-féle koordinátarendszert. Jelölje a P pont helyét az $\mathbf{r}$ vektor. Fejezzük ki ezt az $\mathbf{r}$ vektor r hosszával és a vektor irányába mutató $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ radiális (sugárirányú) egységvektorral, mint bázisvektorral:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r.$$

Ezzel a P pont helyzete egyértelműen megadható. Az $\mathbf{e}_r$ radiális egységvektor Descartes-féle koordinátarendszerbeli komponenseit $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, ahol φ az

r vektor x tengellyel bezárt szöge. Így az (x,y) derékszögű koordináták és az újonnan bevezetett r,φ közötti $(x,y) \longleftrightarrow (r,\varphi)$ kapcsolat

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi,$$

illetve

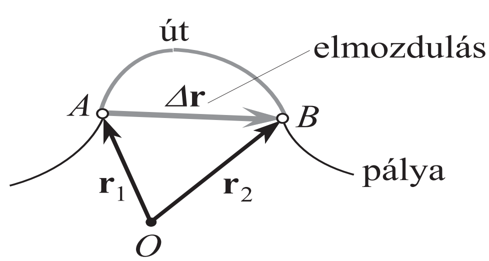
$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

A síkbeli polárkoordináta-rendszerben, mint kétdimenziós térben két bázisvektor kell, ahogy az $\mathbf{i},\mathbf{j}$ bázisvektorok a kétdimenziós Descartes-féle koordinátarendszerben. A másik bázisvektor, a transzverzális egységvektor, az $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, amely az $\mathbf{e}_r$ bázisvektorra merőleges. A koordinátavonalakat úgy kapjuk, hogy vagy az r sugarat, vagy a φ szöget rögzítjük és közben a másik mennyiséget változtatjuk. Így rögzített szögek esetén origóból induló félegyeneseket, rögzített sugarak esetén koncentrikus köröket kapunk.

1.4. Kinematikai alapfogalmak

Tekintsük egy geometriai pont mozgását (lásd. az 1 ábra). A pont pályája az A



1. ábra. Kinematikai fogalmak

és B pontokon is átmenő görbe. Az A és B pontok közötti ívhossz a megtett Δs út. A pont a t időpillanatban az A pontban, a $t+\Delta t$ időpillanatban a B pontban van.

Az O origóból az A ponthoz húzott vektor az $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t)$ hely- vagy helyzetvektor, míg a B ponthoz tartozó helyvektor $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t+\Delta t)$. Az A pontból a B pontba mutató $\Delta\mathbf{r}$ vektor, vagyis a

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \tag{1.0.1}$$

az elmozdulás vektor. Az átlagsebesség az $s_{\text{össz}}$ összes megtett út osztva a $t_{\text{össz}}$ összes eltelt idővel:

$$v_{\text{átl}} = \frac{s_{\text{össz}}}{t_{\text{össz}}} \longrightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1.0.2}$$

amely skalár mennyiség. Azaz csak a nagyságát tudjuk. Ha a Δt időtartamot egyre rövidebbnek vesszük ($\Delta t \to 0$ és létezik a matematikai határérték), akkor a

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.0.3}$$

sebesség a t időpillanatbeli sebesség nagyság. (Az út idő szerinti differenciálhányadosa, deriváltja.)

Az előzőhöz hasonló meggondolásokat az elmozdulásvektorra alkalmazva kapjuk a pillanatnyi sebesség vektorát

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.0.4}$$

amely az irányt is megadja. A pillanatnyi sebesség megmutatja, hogy a következő pillanatban milyen irányba és egy secundum alatt menyivel fog elmozdulni. Definíciója: időegység alatti elmozdulás.

Jelölje a hely- és sebességvektor komponenseit Descartes-koordinátákban az $\mathbf{r} = (x, y, z)$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Ekkor

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}; \quad v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}; \quad v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{1.0.5}$$

A helyvektor kifejezhető az ívhossz szerint parametrizálva, azaz az

$$\mathbf{r}(s(t))$$

alakban. Elvégezzük a láncszabálynak megfelelő

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta s \to 0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \mathbf{e}_t v \tag{1.0.6}$$

átalakításokat. Innen leolvasható, hogy a pillanatnyi sebesség mindig a pályagörbe érintője irányába mutat. (Az $\mathbf{e}_t$ egységvektor neve: tangenciális egységvektor.)
A sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{1.0.7}$$

A gyorsulás időegység alatti sebességváltozás, azaz

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.0.8}$$

1.5. Speciális esetek

1.5.1. Egyenesvonalú egyenletes mozgás

Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fogalma azt jelenti, hogy a pont sebességvektora állandó, azaz sebesség nagysága és iránya a mozgás során állandó

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathrm{const.} \tag{1.0.9}$$

A pont gyorsulása

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{1.0.10}$$

a pont helye

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \tag{1.0.11}$$

Itt $\mathbf{r}_0$ a kezdeti időponthoz tartozó helyvektor. Az x tengely mentén tekintve a mozgást

$$x(t) = v_0 t + x_0. \tag{1.0.12}$$

1.5.2. Egyenesvonalú egyenletesen változó mozgás

Az egyenesvonalú egyenletesen változó mozgás fogalma azt jelenti, hogy a pálya egyenes, és a tömegpont sebessége azonos időközönként ugyanannyival változik, azaz gyorsulásvektora állandó, azaz gyorsulás nagysága és iránya a mozgás során állandó

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 = \mathrm{const.} \tag{1.0.13}$$

Ekkor a pont sebessége

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{v}_0, \tag{1.0.14}$$

ahol $\mathbf{v}_0$ a kezdeti időponthoz ($t = 0$) tartozó sebességvektor. A pont helyének időbeli változását a következő függvény adja meg:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}_0 t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0, \tag{1.0.15}$$

ahol $\mathbf{r}_0$ a kezdeti időponthoz tartozó sebességvektor. Az x tengely mentén tekintve a mozgást

$$v(t) = a_0 t + v_0 \tag{1.0.16}$$

és

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0. \tag{1.0.17}$$

Ezt az összefüggést gyakran négyzetes út törvénynek nevezik.