Erőtörvények

Márkus Ferenc*
Fizika Tanszék, BME

2015. november 3.

Az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ dinamika alapegyenletének megoldásához meg kell tudnunk fogalmazni a kölcsönhatás mértékére jellemző erőt vagy erőket. Ezek ismeretében adhatjuk meg az adott probléma mozgásegyenletét. Az erők meghatározása külön feladat, és nem triviális. Csak mechanikai mozgásokra fókuszálva az erő általános alakja

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \tag{1}$$

azaz az erő a hely, a sebesség és az idő függvénye. Ha csak hely és időfüggés van

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \tag{2}$$

akkor erőtérről beszélünk. Ha az erőtér időfüggetlen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

akkor stacionárius (időben állandó) az erőtér. Ha az erőtér nem függ a helytől, azaz a tér minden pontjában ugyanolyan irányú és nagyságú

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0, \tag{4}$$

akkor az erőtér homogén.

Az alábbiakban a mechanika tanulmányokban leggyakrabban előforduló erőket soroljuk fel:

Szabad erők

1. **Nehézségi erőtér**
   A nehézségi erőtér homogén, szokásos alakja

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g}. \tag{5}$$

*e-mail: markus@phy.bme.hu

Az általános tömegvonzásból származik, pl. hogy a Föld vonzza a felszínén lévő testeket. Kis magasságig homogénnak tekinthető. A **g**-t nehézségi gyorsulásnak nevezik, iránya lefele mutat. Az m tömeget súlyos tömegnek nevezik. A g nagysága a 45. szélességi körön $g = 9,81$ m/s^2.

2. **Gravitációs erőtér**

A testek vonzásából ered. Ha adott két test m és M, akkor és köztük lévő távolság r, akkor ébredő vonzó erő nagysága:

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}. \tag{6}$$

Ha az M tömegű testet az origóban, az m tömegű testet az $\mathbf{r}$ helyvektorú pontban helyezzük el, akkor az m tömegű testre ható erő nagysága és iránya

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{7}$$

ahol az $\mathbf{r}/r$ az origóból az m felé mutató radiális egységvektor. A negatív előjel a vonzó kölcsönhatás tulajdonságot fejezi ki. A γ a gravitációs állandó, értéke $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.
Az R sugarú, M tömegű Föld felszínén elhelyezett m tömegű testre ható erő nagysága

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}. \tag{8}$$

Ha ebből leválasztjuk a g-vel jelölt

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \tag{9}$$

faktort, akkor éppen a nehézségi gyorsulás Föld felszíni értékét kapjuk. Ha a testet a Föld felszínétől h magasságra emeljük, akkor

$$g(h) = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} \tag{10}$$

lesz a nehézségi gyorsulás értéke. Ha $h << R$, akkor e formula közelítőleg átmegy a

$$g(h) \sim \gamma \frac{M}{R^2}(1 - \frac{2h}{R}) = g(1 - \frac{2h}{R}) \tag{11}$$

alakba. Mivel a Föld sugara 6370 km, így látható, hogy viszonylag nagy h magasságig – néhény száz, ezer méter – az erőteret homogénnak lehet tekinteni.

3. **Rugalmas erőtér**

Ha egy rugót a nyugalmi l_0 hosszáról l hosszra megnyújtunk, akkor a rugóban

$$F = k(l - l_0) \tag{12}$$

nagyságú erő ébred. A k a rugó direkciós ereje. Ezt a hosszváltozást gyakran x-szel jelöljük, így az erő nagyságára kx írható. A rugóban ébredő erő iránya az elmozdulással ellentétes. Ezt az

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \tag{13}$$

alakkal tudjuk kifejezni. Egydimenzóban — csak x irányú elmozdulás esetén — ez

$$F = -kx \tag{14}$$

alakra egyszerűsödik.

Súrlódási erők

4. **Csúszási súrlódás**

A tapasztalat szerint egy test felületen történő csúszása során súrlódási erő lép fel, amelynek nagysága arányos a testre ható N nyomóerővel (támaszerővel), azaz

$$F_{cs} = \mu N, \tag{15}$$

ahol μ a csúszási súrlódási együttható. Ez az összefüggés csak az erő nagyságát tartalmazza. Ha meg szeretnénk adni, hogy milyen a súrlódási erő iránya, úgy a Coulomb-súrlódási erő alakot kell felírni:

$$\mathbf{F}_{cs} = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v}. \tag{16}$$

Itt a $\mathbf{v}/v$ a sebesség egységvektora. A negatív előjel azt az értelmezést adja, hogy a súrlódási erő a pillanatnyi sebesség irányával ellentétes.

5. **Tapadási súrlódás**

Ha a test egy oldalirányú erő hatására nem mozdul el a felületen, akkor azt mondjuk, ha a tapadási súrlódás akadályozza meg a mozgást. Ekkor pont akkora tapadási erő lép fel, mint a ható erő. Ennek a tapadási erőnek van egy maximális értéke, amely az

$$F_t = \mu_t N \tag{17}$$

alakban adható meg. Az F_t erő az N nyomóerővel arányos; a μ_t arányossági tényezőt tapadási súrlódási együtthatónak nevezzük.
A tapadási együttható egyszerű mérése úgy történhet, hogy az m tömegű testet egy mozgatható szögállású lejtőre helyezzük. A lejtő α szögét növelve egyszercsak megcsúszik a test. A megcsúszás előtti szög ismeretében — figyelembe véve, hogy a testre ható erő lejtő irányú komponense $mg\sin\alpha$, a nyomóerő $mg\cos\alpha$ — a μ_t tapadási együttható

$$\mu_t = \mathrm{tg}\alpha. \tag{18}$$

A fentiekből levonható következtetés, hogy $\mu < \mu_t$ mindig fennáll.

6. **Gördülési ellenállás**

A testek gördülése során fellépő F_g gördülési ellenállási erő nagysága a nyomóerővel arányos

$$F_g = \mu_g N, \tag{19}$$

ahol a μ_g arányossági tényezőt gördülési ellenállási együtthatónak nevezzük.

Közegellenállási erők

7. **Kis sebességek esete**

A tapasztalat szerint a kis sebességgel mozgó testekre — a folyadék- és gázbeli (fluidumbeli) súrlódás és áramlási viszonyok miatt — a $\mathbf{v}$ sebességgel arányos $\mathbf{F}_v$ közegellenállási erő hat, amely az

$$\mathbf{F}_v = -c\mathbf{v} \tag{20}$$

alakban adható meg. A negatív előjel azt mutatja, hogy a közegellenállási erő mindig ellentétes pillanatnyi sebességgel. A c arányossági tényező a függ a test geometriájától, a folyadék vagy gáz viszkozitásától (belső súrlódásától) és sűrűségétől.
Például ha egy R sugarú gömb mozog az η viszkozitású fluidumban (Stokes-törvény) akkor

$$c = 6\pi R\eta, \tag{21}$$

így a közegellenállási erő

$$\mathbf{F}_{\mathrm{Stokes}} = 6\pi R\eta\mathbf{v}. \tag{22}$$

8. Nagy sebességek esete

Ha egy test nagy sebességgel mozog, akkor a közegellenállás jellemzően a sebesség négyzetével arányos, azaz

$$F_{v^2} = c'v^2. \tag{23}$$

Célszerű ez esetben is vektori alakban felírni a közegellenállási erőt, amely

$$\mathbf{F}_{v^2} = -c'v^2\frac{\mathbf{v}}{v}, \tag{24}$$

ahol a $\mathbf{v}/v$ a sebesség egységvektora, a c' arányossági tényező a függ a test geometriájától, a fluidum viszkozitásától és sűrűségétől.