1. Feladatok a dinamika tárgyköréből

Newton három törvénye

1.1. Feladat: Három azonos m tömegű gyöngyszemet fonálra fűzünk, egymástól kis távolságokban a fonálhoz rögzítünk, és az elhanyagolható tömegű fonál végét ujjunkkal fogva függőlegesen lógatunk a g homogén nehézségi erőtérben. Majd a t_0 időpillanattól kezdve a gyorsulással emeljük a fonál végét. Mekkora erő ébred az egyes fonalszakaszokban?

Megoldás: Számozzuk meg a gyöngyszemeket. A legalsó legyen az 1-es, a középső a 2-es, a felső a 3-as. A koordinátarendszer y tengelye mutasson felfele. Mindhárom gyöngyszem a gyorsulással mozog felfele, így a koordinátarendszerben pozitív értékű. A nehézségi gyorsulás lefele mutat, így negatív: $-g$.
Az 1-es testre a K_1 kötélerő (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) hat felfele;
a 2-es testre hat a $-K_1$ kötélerő lefele (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) és a K_2 kötélerő felfele (a 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon);
a 3-as testre hat a $-K_2$ kötélerő lefele (az 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon) és az F kötélerő felfele (ezt mi fejtjük ki).
A mozgásegyenletek rendre (1-2-3 testre):

$$ma = K_1 - mg, \tag{1.1.1}$$

$$ma = K_2 - K_1 - mg, \tag{1.1.2}$$

$$ma = F - K_2 - mg. \tag{1.1.3}$$

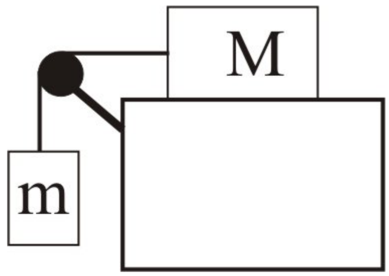
Az egyenletrendszerből a keresett kötélerők:

$$K_1 = m(a+g), \tag{1.1.4}$$

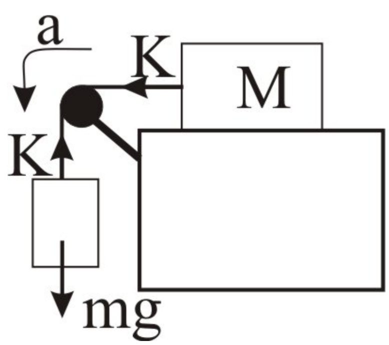
$$K_2 = ma + K_1 + mg = 2m(a+g), \tag{1.1.5}$$

$$F = ma + K_2 + mg = 3m(a+g). \tag{1.1.6}$$

Megjegyzés: Gyakorlásként általánosítsa a feladatot különböző számú és tömegű gyöngyszemekre!



1. ábra.



2. ábra.

1.2. Feladat: (HN: 5B-33) Az m és $M = 8$ kg tömegű hasábokat az 1. ábrán látható elrendezésben fonallal kötünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható.

(a) Mekkora az alsó test m tömege, ha a testek gyorsulása $a = 2$ m/s^2?

(b) Mekkora K erő feszíti a fonalat?

Megoldás:

(a) Mivel a hasábokat összekötő kötél nem nyúlik meg, mindkét hasáb gyorsulása ugyanakkora (lásd a 2. ábrát.) Az egyes hasábok mozgásegyenletei

$$ma = mg - K \tag{1.2.1}$$

és

$$Ma = K. \tag{1.2.2}$$

E két egyenletből

$$m = \frac{Ma}{g-a} = 2\,\text{kg} \tag{1.2.3}$$

adódik.

(b) A kötelet feszítő erő pedig

$$K = \frac{mM}{m+M} g = 16\,\text{N}. \tag{1.2.4}$$

Centripetális erő

1.3. Feladat: Egy $m = 70$ kg tömegű pilóta repülőgépével $R = 1$ km sugarú függőleges síkú pályán $v = 1080$ km/h egyenletes sebességgel köröz. A repülőnek állandóan a teteje néz a körpálya középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a pilóta az ülést a körpálya legfelső pontján?

Megoldás: A körpálya legfelső pontjában a pilóta körmozgását az mg súlyerő és a kör közepe felé mutató N támaszerő biztoítja:

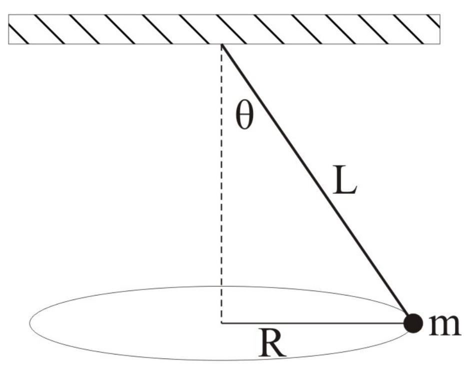
$$m\frac{v^2}{R} = mg + N \tag{1.3.1}$$

Ebből az egyenletből az N támaszerő könnyen kifejezhető:

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg = 5600\,\mathrm{N}. \tag{1.3.2}$$

A pilóta az ülést ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erővel nyomja. (A nyomóerő a pilóta súlyának nyolcszorosa.)

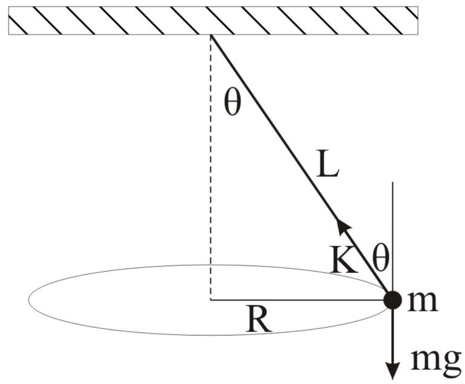
1.4. Feladat: (HN 5B-31) Egy L hosszúságú fonállal a mennyezethez erősített testet a 3. ábrán látható módon úgy hozunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú, R sugarú körpályán mozog, miközben a fonál a függőlegessel θ szöget zár be. Fejezzük ki egy fordulat idejét az L és θ paraméterek függvényében!



3. ábra.

Megoldás: Jelölje K az m tömegű testre ható kötélerő nagyságát (lásd a 4. ábrát). Mivel a tömegpont nem mozdul el függőlegesen, a súlyerő egyensúlyt tart a kötélerő függőleges komponensével:

$$K\cos\theta = mg, \tag{1.4.1}$$



4. ábra.

míg a vízszintes komponens a körpályán történő mozgáshoz biztosítja a szükséges centripetális gyorsulást:

$$K \sin\theta = m\frac{v^2}{R}. \tag{1.4.2}$$

A két egyenletből a tömegpont sebessége (felhasználva, hogy $R = L\sin\theta$)

$$v = \sqrt{gL\sin\theta \operatorname{tg}\theta}. \tag{1.4.3}$$

Egy fordulat ideje

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}. \tag{1.4.4}$$

Súrlódási erő

1.5. Feladat: Vízszintes asztallapon két tégla fekszik egymáson. Minimálisan mekkora F erővel kell hatni az alsó téglára, hogy az kicsússzon a felső alól? A tapadási tényező az asztallap és a tégla, valamint a két tégla között $\mu = 0,4$, a két tégla össztömege pedig $m = 5$ kg.

Megoldás: Jelölje a felső test tömegét m_1, az alsó test tömegét pedig m_2. Ekkor $m = m_1 + m_2 = 5$ kg. Mivel a megcsúszás határát keressük, így a két test gyorsulása megegyezik. A felső téglára $F_{s1} = \mu m_1 g$ tapadási erő hat, mellyel a tégla mozgásegyenlete:

$$m_1 a = F_{s1} = \mu m_1 g \tag{1.5.1}$$

Az alsó téglára a felső tégla által kifejtett F_{s1} tapadási erő mellett, az alsó tégla és asztallap között fellépő $F_{s2} = \mu(m_1 + m_2)g$ csúszási súrlódási erő is hat, melyek fékezni próbálják az alsó tégla mozgását. Az alsó tégla mozgásegyenlete:

$$m_2 a = F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g = F - \mu m_1 g - \mu m g. \tag{1.5.2}$$

Az első egyenletből kifejezve az a gyorsulást

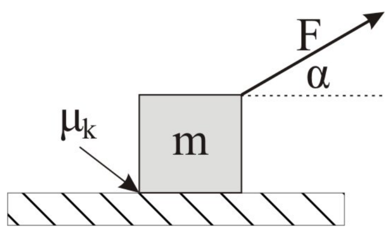
$$a = \mu g \tag{1.5.3}$$

adódik. Ez az m_1 test maximális gyorsulását jelenti. A fenti egyenletből az F erő a minimális értéke

$$F = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g = ma + \mu mg = 2\mu mg = 40\,\text{N}. \tag{1.5.4}$$

Megjegyzés: A feladatmegoldásból látszik, hogy a kérdés megválaszolásához csak az össztömegre volt szükség. Kisebb vagy nagyobb erő alkalmazásakor az egyenletekből levont következtetések módosulhatnak! Ezeknek diszkussziója gyakorló feladat.

1.6. Feladat: (HN 5B-52) Egy $m = 4$ kg tömegű testet az 5. ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk ($\alpha = 30^0$). Mekkora a test gyorsulása, ha a test és talaj közötti csúszási súrlódási együttható $\mu_k = 0,2$?



5. ábra.

Megoldás: Mivel a test nem emelkedik fel a talajról a függőleges gyorsulása zérus. Ezért

$$0 = N + F\sin\alpha - mg, \tag{1.6.1}$$

ahol N a testre ható támaszerő. Írjuk fel a mozgás vízszintes vetületére vonatkozó mozgásegyenletet!

$$ma = F\cos\alpha - F_s, \tag{1.6.2}$$

ahol F_s a testre ható súrlódási erő, melyet az N támaszerő segítségével határozhatunk meg:

$$F_s = \mu_k N. \tag{1.6.3}$$

Az egyenletrendszer megoldásából a test gyorsulása meghatározható:

$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu_k \sin\alpha)}{m} - \mu_k g. \tag{1.6.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 2,83$ m/s^2 adódik.

1.7. Feladat: Egy függőleges tengelyű korong ω_0 szögsebességgel forog. A korong közepétől R távolságban m tömegű test helyezkedik el. A korong és a test között μ tapadási súrlódási együttható van. A korong egyenletes lassulásba kezd β szöggyorsulással. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a test ne csússzon meg?

Megoldás: A korong szögsebessége az

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t \tag{1.7.1}$$

függvény szerint változik. Ezért a korongon lévő test centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = R\omega(t)^2 = R(\omega_0 - \beta t)^2. \tag{1.7.2}$$

A test tangenciális gyorsulása pedig

$$a_t = R\beta. \tag{1.7.3}$$

A test eredő gyorsulása

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}, \tag{1.7.4}$$

melyet a tapadási erő biztosít a test számára. A tapadás feltétele, hogy

$$\mu mg \geq ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}. \tag{1.7.5}$$

A tapadási súrlódási együttható ezért:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{R^2(\omega_0 - \beta t)^4 + (R\beta)^2}}{g}. \tag{1.7.6}$$

A legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadási együttható

$$\mu_{min} = R\frac{\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2}}{g}. \tag{1.7.7}$$