2. gyakorlat

1. Feladatok a kinematika tárgyköréből

Tömegpontok mozgása egyenes mentén, hajítások

1.1. Feladat: Mekkora az átlagsebessége annak pontnak, amely mozgásának első szakaszában v_1 sebességgel s_1 utat, második szakaszában v_2 sebességgel s_2 utat tesz meg?

Megoldás: Az átlagsebességet az összesen megtett útmennyiség és az ehhez szükséges teljes időtartam hányadosaként kapjuk meg: $\overline{v} = \frac{\sum_i s_i}{\sum_i t_i}$. Az eltelt időtartamok: $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$ és $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$. Így

$$\overline{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}. \tag{1.1.1}$$

1.2. Feladat: Egy tömegpont az x tengely mentén mozog -4 m/s^2 állandó gyorsulással. Az $x = 0$ helyen a sebessége 20 m/s, az időt ekkor kezdjük el mérni. Mikor lesz a test először az $x = 18$ m helyen?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 20$ m/s, $a = -4$ m/s^2. A tömegpont helye, mint az idő függvénye az

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.2.1}$$

összefüggéssel adható meg. Oldjuk meg az egyenletet a t változóra az $x = 18$ m helyettesítés mellett:

$$18 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.2.2}$$

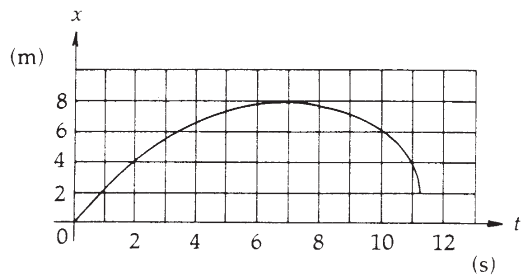
Az egyenlet gyökei: $t_1 = 1$ s és $t_2 = 9$ s. A tömegpont először a t_1 időpillanatban éri el az $x = 18$ m helyet.

1.3. Feladat: (HN 2B-19) Az 1. ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja.

(a) Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2$ s és $t_2 = 5$ s időintervallumra!

(b) Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége?

(c) Mekkora a $t = 10$ s időpontban a pillanatnyi sebessége?



1. ábra.

Megoldás:

(a) A grafikonról leolvasható, hogy a $t_1 = 2$ s időpillanatban $x_1 = 4$ m a helykoordináta, valamint a $t_2 = 5$ s időpillanatban $x_2 = 7$ m. Az átlagsebességet a teljesen megtett út és hozzá tartozó idő hányadosaként kapjuk meg:

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1 \text{ m/s}. \tag{1.3.1}$$

(b) A mozgás sebessége ott zérus, ahol a görbéhez húzott érintő meredeksége zérus. Ez jó közelítéssel láthatóan a

$$t' = 7 \text{ s} \tag{1.3.2}$$

időpillanatban áll fenn.

(c) A $t = 10$ s-beli sebesség meghatározása a pontbeli érintő kiszámolását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ponthoz nagyon közeli értékeket kellene leolvasni. Mivel elég nagy a leolvasási pontatlanság – a megértés lényegét pedig nem érinti – az érintő meghatározását úgy végezzük el, hogy tekintjük a $t_9 = 9$ s-hoz és $t_{11} = 11$ s-hoz tartozó $x_9 = 7$ m és $x_{11} = 4$ m helykoordinátákat, és kiszámoljuk a

$$v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{t_{11} - t_9} \sim -1,5 \text{ m/s}. \tag{1.3.3}$$

meredekséget. A negatív előjel arra utal, hogy a pont az origó felé mozog. A mozgás irányának megváltozása a $t' = 7$ s időpillanatban történt.

1.4. Feladat: Egy $h = 35$m magas torony tetejéről, a vízszinteshez képest $\alpha = 25^0$-os szög alatt ferdén felfelé egy labdát hajítunk el $v_0 = 80$ m/s kezdősebességgel.

(a) Határozzuk meg a földetérésig eltelt időt!

(b) Határozzuk meg a labda földetérési helyének távolságát a toronytól!

(c) Határozzuk meg a labda becsapódási sebességének nagyságát és irányát!

Megoldás:

(a) Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a torony lábához. A labda x és y koordinátái az idő függvényében ekkor az

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \tag{1.4.1}$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + h \tag{1.4.2}$$

összefüggésekkel adhatóak meg. A repülés teljes ideje a

$$0 = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_0^2 + h \tag{1.4.3}$$

egyenletből határozható meg. A másodfokú egyenlet fizikailag értelmes megoldása

$$t_0 = 7,67\,\mathrm{s}. \tag{1.4.4}$$

(b) A repülési időt behelyettesítve az (1.4.1) egyenletbe megkapjuk a becsapódás távolságát, ami

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos\alpha. \tag{1.4.5}$$

Behelyettesítve az értékeket $d \approx 556,1$ m adódik.
(c) A becsapódás pillanatában sebességvektor komponensei

$$v_x(t_0) = v_0 \cos\alpha \approx 72,5\,\mathrm{m/s} \tag{1.4.6}$$

és

$$v_y(t_0) = v_0 \sin\alpha - g t_0 \approx -42,9\,\mathrm{m/s}. \tag{1.4.7}$$

A sebesség nagysága pedig az egyes komponensek segítségével számolható ki a $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ összefüggéssel. Behelyettesítve a számadatokat $v \approx 84,2$ m/s adódik. A becsapapódás szöge pedig

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} = -30,61^0. \tag{1.4.8}$$

2. Feladatok körmozgás tárgyköréből

Kerületi sebesség, szögsebesség, szöggyorsulás, centripetális és tangenciális gyorsulás

2.1. Feladat: (HN 11C-14) Egy kerék a vízszintes talajon csúszás nélkül $v = 6$ m/s sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, mikor a részcske a kerék elülső pontjában van!

Megoldás: A haladó mozgásból eredően a kerék minden egyes pontja rendelkezik $v_x = 6$ m/s vízszintes irányú haladómozgással. Ugyanakkor a kerületi pontok ugyancsak $v_k = 6$ m/s sebességgel mozognak a kerék középpontja körül. Az elülső pont kerületi sebességének iránya lefelé mutat, azaz $v_y = -6$ m/s. A részecske pillanatnyi sebességvektora tehát

$$\mathbf{v} = (v_x; v_y) = (6; -6)\,\text{m/s}. \tag{2.1.1}$$

Megjegyzés: A tiszta gördülés feltétele, hogy a kerék legalsó pontja ne mozogjon a talajhoz képest. A legalsó pont kerületi sebessége épp ellentétes irányú, de azonos nagyságú, mint a kerék haladó mozgásából származó sebessége. A két mozgás „összegének" eredménye, hogy a kerék legalsó pontjának sebessége zérus a talajhoz képest.

2.2. Feladat: Egy autó egyenletesen gyorsulva álló helyzetből 15 m/s-os sebességre tesz szert 20 s alatt.
(a) Mekkora a kerék szöggyorsulásam, ha egy kerekének sugara $1/3$ m és tisztán gördül a gyorsulás alatt?
(b) Hány fordulatot tett meg a kerék a folyamat alatt?

Megoldás:
(a) Az autó gyorsulása

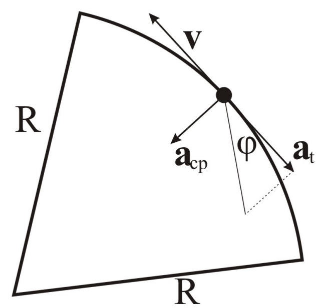
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}75\,\text{m/s}^2. \tag{2.2.1}$$

Mivel $a = R\beta$ (a kerék tisztán gördül), a szöggyorsulás értéke

$$\beta = 2{,}25\,\text{rad/s}^2. \tag{2.2.2}$$

(b) A szögelfordulás nagysága pedig

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = 450\,\text{rad}, \tag{2.2.3}$$



2. ábra.

amelyből a megett fordulatok száma

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 71,6. \tag{2.2.4}$$

2.3. Feladat: (HN: 4C-26) Egy $R = 300$ m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó $a_t = -1,2$ m/s^2 gyorsulással fékezni kezd. Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége v = 15 m/s. Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére!

Megoldás: A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \approx 0,75 \text{ m/s}^2. \tag{2.3.1}$$

Az autó a_t gyorsulása a tangenciális gyorsulás, iránya pedig a v sebességgel ellentétes. A tangenciális és centripetális gyorsulás egymásra merőlegesek. Az eredő gyorsulás érintő irányával bezárt φ szögére érvényes (lásd a 2. ábrát), hogy

$$\text{tg}\,\varphi = \left|\frac{a_{cp}}{a_t}\right| = 0,625. \tag{2.3.2}$$

Így az eredő gyorsulás $\varphi = 32^0$ szöget zár be az érintővel, nagysága pedig $|a| = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \approx 1,4$ m/s^2.