Haladó problémamegoldó szeminárium 1.
javító feladatsor
beadandó 2020. december 11. (péntek) 24:00-ig

0. Határozza meg a következő határozott integrálok értékét!

$$\int_0^H \frac{1}{\sqrt{2g(H-x)}}\,\mathrm{d}x = , \qquad \int_H^0 \frac{-1}{\sqrt{2gx}}\,\mathrm{d}x = ,$$

$$\int_0^H \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{H}\left(H^2-x^2\right)}}\,\mathrm{d}x = , \qquad \int_H^0 \frac{-1}{\sqrt{\frac{g}{H}\left(2Hx-x^2\right)}}\,\mathrm{d}x = \ .$$

1. Egy folyó sebessége v (tegyük fel, hogy a folyó egyenes, és a valósággal ellentétében a víz mindenhol ugyanakkora sebességgel folyik). Egy csónak a vízhez képest u sebességgel tud haladni.

A parthoz képest milyen irányba evezzen a csónakos, ha a lehető legrövidebb *úton* akar átjutni a túlsó partra? Vizsgálja meg az $u > v$ és az $u < v$ eseteket is! A megoldást meg lehet találni szélsőérték-számítással (deriválással) és geometriai megfontolásokkal is.

2. Egy biliárdasztalon egy tisztán gördülő golyó „telibe talál” egy ugyanolyan tömegű és méretű álló golyót. Az ütközés tökéletesen rugalmas, a gördülési ellenállás és a golyók közti súrlódás elhanyagolható. A golyók és a talaj közötti viszont nem!

Hogyan mozognak a golyók az ütközés után? Ábrázolja mindkét golyó $v(t)$ és $r\omega(t)$ függvényét a tiszta gördülés eléréséig egy *közös* grafikonban!

A teljes mozgási energia mekkora hányada vész el?

Mi történne, ha a golyók közt is jelentős súrlódás lenne? (Gondolja alaposan végig! Egészen meglepő dolgok is történhetnek!)

3. Írja fel egy kúpinga teljes E mechanikai energiáját a fonál ℓ hosszának és a kúp (nem feltétlen kicsi) α félnyílásszögének a függvényében! (Természetesen az ingatest állandó m tömege és a g nehézségi gyorsulás is paraméter. A keringés v sebességét és ω szögsebességét, valamint a pálya r sugarát azonban fejezze ki a többi változóval!) A helyzeti energia nullpontját a felfüggesztésnél válassza.

a) Fejezze ki az energia ΔE (kicsiny) megváltozását, ha a fonál hossza kicsiny $\Delta\ell$, a félnyílásszög kicsiny $\Delta\alpha$ értékkel megváltozik!

b) A kúpinga fonalát $\Delta\ell < 0$ értékkel megváltoztatjuk (a fonalat $|\Delta\ell|$ hosszal feljebb húzzuk). Hogyan változik a kúpinga félnyílásszöge?

c) Írja fel a kúpinga $\mathbf{N}$ perdületének függőleges N_z komponensét a plafonon lévő kis lyukra vonatkozóan! Fejezze ki a perdületkomponens kicsiny ΔN_z megváltozását, ha a fonál hossza kicsiny $\Delta\ell$, a félnyílásszög kicsiny $\Delta\alpha$ értékkel megváltozik!

d) A *b)* és *c)* rész eredményét felhasználva mutassa meg, hogy a fonál feljebb húzásakor az N_z perdületkomponens (előzetes elvárásainkkal összhangban) valóban nem változik!

(folytatás a következő oldalon)

4/a Egy R sugarú H magasságú, hengeres, felül is zárt tartály tele van folyadékkal. A tartály tetején középen egy kis nyílás van, ahol a folyadék a p_0 nyomású külvilággal érintkezik. A tartály hosszú ideje ω szögsebességgel forgatjuk, így a teljes folyadéktömeg is vele együtt forog. A folyadék sűrűsége ϱ, nehézségi gyorsulás g.

Adja meg a folyadék $p(r, h)$ nyomását, ahol $0 \leq r \leq R$ a forgástengelytől mért távolság és $0 \leq h \leq H$ a henger tetejétől számított mélység!

Mekkora sugárirányú sebességgel kezd kiáramlani a folyadék a tartályból, ha a henger oldalfalán, közvetlenül az aljánál, egy kis nyílás keletkezik?

4/b Egy téglatest alakú üres medence a tetején lévő csap kinyitása után T_1 idővel telik meg. A teli medence az alján lévő kifolyót kinyitva T_2 idő alatt ürül ki. Mi történik, ha a vízcsapot és a kifolyót is nyitva hagyjuk? Mennyi víz lesz hosszú idő után a tartályban? Milyen T_1/T_2 arány esetén kell túlfolyástól tartanunk?

5. Egy $D = 10\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rúgóra $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$ tömegű alumíniumrudat akasztunk. A rezgést úgy csillapítjuk, hogy az alumíniumrúd mágnesek között mozog. Az örvényáramok hatására sebességgel arányos fékezőerő jön létre, $k = 0{,}4\,\mathrm{Ns/m}$.

a) Mekkora a β csillapítási tényező? Mekkora a csillapított rezgés ω' sajátkörfrekvenciája? Írja fel és ábrázolja (milliméterpapíron vagy számítógéppel) a test kitérését és sebességét az idő függvényében, ha a testet $x(0) = 5\,\mathrm{cm}$ helyről $v(0) = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$ sebességgel indítjuk el! Mennyi idő után csökken a rezgés amplitúdója 1 mm alá?

A rendszert gerjesztjük: a rugó felső végét az $x_\mathrm{g}(t) = A_g \sin \omega t$ függvény szerint mozgatjuk, ahol $A_g = 5\,\mathrm{mm}$.

b) Mekkora a gerjesztő erő F_0 amplitúdója? Hol van a rendszer amplitúdó- és sebességrezonanciája? Rezonancia esetén mekkora az amplitúdó ill. a sebességamplitúdó?

A csillapítást (a mágnesek távolabbra állításával) lecsökkentjük, most $k = 0{,}02\,\mathrm{Ns/m}$. A kényszer frekvenciáját $\omega = 9\,\mathrm{s}^{-1}$ értékre állítjuk (a többi paraméter változatlan). A $t = 0$ pillanatban a test az egyensúlyi helyzetben nyugalomban van, ekkor bekapcsoljuk a gerjesztést.

c) Írja fel és ábrázolja a test kitérését az idő függvényében (milliméterpapíron vagy számítógéppel, $t = 50\,\mathrm{s}$-ig)! Milyen jelenséget figyelhet meg?

6. Az (x, y) síkban egy síkhullám az x-tengellyel $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ szöget bezáró irányba terjed. A hullám körfrekvenciája ω, hullámszámának nagysága k, amplitúdója A_0, a kezdőfázisa 0.

a) Írja fel a $\mathbf{k}$ hullámszámvektort! Írja fel a hullám $\Psi_1(x, y, t)$ hullámfüggvényét!

Egy másik $\Psi_2(x, y, t)$ hullám is terjed ugyanitt, melynek minden paramétere megegyezik az előzőével, de iránya az x-tengellyel $-\vartheta$ szöget zár be.

b) Írja fel a két hullám szuperpozíciójaként keletkező hullám $\Psi(x, y, t)$ hullámfüggvényét! Milyen irányba halad ez a furcsa hullám? Mekkora a sebessége? Diszkutálja a $\vartheta = \pi/2$ esetet!

c) A hullámtér bármely pontja harmonikus rezgőmozgást végez. Adja meg a hullámtér tetszőleges (x, y) pontjában a rezgés $A(x, y)$ amplitúdóját!

d) Adja meg azon (x, y) helyeket, ahol az amplitúdó maximális! Ezek $\vartheta > 0$ esetben egyenesek lesznek. (Diszkutálja a $\vartheta = 0$ esetet!) Milyen az egyenesek iránya és mekkora a távolságuk?