

**Haladó problémamegoldó szeminárium 1.**  
**Beküldési határidő: 2020. szeptember 29., kedd 24:00**

*Beküldendő legalább két feladat teljes megoldása (diskussziókkal, általánosításokkal), vagy legalább három feladat lényegében teljes megoldása.*

*Formátum: egyetlen .pdf fájl (szkennerrel vagy applikációval, megfelelően beforgatva, a méret a lap méretéhez igazítva, lehetőleg 5MB méret alatt).*

**1.** Egy kicsi testet egy olyan lejtőre teszünk, ahol magától még épp nem indul el, de ha lefelé meglöknénk, egyenes sebességgel csúszna.

Mekkora lesz a sebessége hosszú idő után, ha  $v_0$  sebességgel vízszintesen (a lejtő esővonalára merőlegesen) lökjük meg?

**2.** Fonálingát derékszögben kitérítünk, majd elengedjük. Melyik szakaszt teszi meg az inga rövidebb idő alatt: az első  $30^\circ$ -ot, vagy a függőleges helyzetig hátralévő maradék  $60^\circ$ -ot?

*Segítség:* Az időket pontosan meghatározni nagyon nehéz. Ehelyett próbálja az első szakasz megtételéhez szükséges időt alábecsülni, a második szakasz megtételéhez szükséges időt pedig felülbecsülni.

Ezen kívül megoldhatja a feladatot számítógéppel numerikusan is!

**3.** Ha egy pohár vizet állandó szögsebességgel forgatunk. Milyen alakú lesz a felület? (Ezt az alapján lehet levezetni, hogy a víz felületén lévő kicsiny folyadék rész centripetális gyorsulását a többi folyadék felületre merőleges nyomóerejének és a nehézségi erőnek az eredője biztosítja.)

**a)** Határozza meg a felület henger tengelyén átmenő síkmetszetének egyenletét! (Paraméterek: a henger sugara  $r$ , a forgási szögsebesség  $\omega$ , a nehézségi gyorsulás  $g$ .)

**b)** Milyen mélyre süllyed a folyadék középpontja a nyugalmi helyzetéhez képest? (Használja fel a térfogat állandóságát!)

**4.** Az  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  függvény egy félkör egyenlete.

Ebből kiindulva integrálással határozza meg a félgömb térfogatát, felszínét, tömegközéppontjának helyét és tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyre vonatkoztatva!

**5.** A  $[-2; 2]$  intervallumon értelmezett  $f(x) = \frac{x}{2}$  függvény segítségével definiáljuk a következő  $I_n$  integrált:

$$I_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}nx\right) dx,$$

ahol  $n$  pozitív egész szám.

Parciális integrálás segítségével határozza meg  $I_n$  értékét tetszőleges  $n$ -re!

Számítógép segítségével ábrázolja közös grafikonban az  $f(x)$  és a  $\sum_{n=1}^m I_n \sin\left(\frac{\pi}{2}nx\right)$  függvényeket  $m = 1, 2, \dots, 6, \dots$  értékekre. Mit tapasztal? Észreveszi, hogy minek a „bevezetése” ez?