Haladó problémamegoldó szeminárium 1.
2. feladatsor – 2019. szeptember 25.

1. Egy kicsi testet egy olyan lejtőre teszünk, ahol magától még épp nem indul el, de ha lefelé meglöknénk, egyenletes sebességgel csúszna.

Mekkora lesz a sebessége hosszú idő után, ha v_0 sebességgel vízszintesen (a lejtő esésvonalára merőlegesen) lökjük meg?

2. Fonálingát derékszögben kitérítünk, majd elengedjük. Melyik szakaszt teszi meg az inga rövidebb idő alatt: az első 30°-ot, vagy a függőleges helyzetig hátralévő maradék 60°-ot?

Segítség: Az időket pontosan meghatározni nagyon nehéz. Ehelyett próbálja az első szakasz megtételéhez szükséges időt alábecsülni, a második szakasz megtételéhez szükséges időt pedig felülbecsülni.

Ezen kívül megoldhatja a feladatot számítógéppel numerikusan is!

3. Határozza meg néhány görbe görbületi sugarát *fizikai megfontolásokkal*!

a) f fókusztávolságú parabola a csúcspontban,

b) a és b féltengelyű ellipszis a tengelyek végpontjainál,

a) A amplitúdójú, λ hullámhosszúságú szinuszos hullám a „hullámhegy”-nél.

4. Ha egy pohár vizet állandó szögsebességgel forgatunk, a víz felszíne forgási paraboloid alakú lesz. A felület alakját az alapján lehet levezetni, hogy a víz felületén lévő kicsiny folyadékrész centripetális gyorsulását a többi folyadék felületre merőleges nyomóerejének és a nehézségi erőnek az eredője biztosítja.

a) Határozza meg a felület henger tengelyén átmenő síkmetszetének egyenletét! (Paraméterek: a henger sugara r, a forgási szögsebesség ω, a nehézségi gyorsulás g.)

b) Milyen mélyre süllyed a folyadék középpontja a nyugalmi helyzethez képest? (Használja fel a térfogat állandóságát!)

5. Az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ függvény egy félkör egyenlete.

Ebből kiindulva integrálással határozza meg a félgömb térfogatát, felszínét, tömegközéppontjának helyét és tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyre vonatkoztatva!

6. A $[-2; 2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \frac{x}{2}$ függvény segítségével definiáljuk a következő I_n integrált:

$$I_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin(\frac{\pi}{2}nx)\,dx,$$

ahol n pozitív egész szám.

Parciális integrálás segítségével határozza meg I_n értékét tetszőleges n-re!

Számítógép segítségével ábrázolja közös grafikonban az $f(x)$ és a $\sum_{n=1}^{m} I_n sin(\frac{\pi}{2}nx)$ függvényeket $m = 1, 2, ..., 6, ...$ értékekre. Mit tapasztal? Észreveszi, hogy minek a „bevezetése” ez?