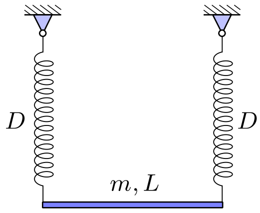
Kísérleti fizika I.

12. gyakorlat

Szükséges előismeretek: csatolt rezgések, normálmódusok és sajátfrekvenciák, csillapított és kényszerrezgések, rezonancia;

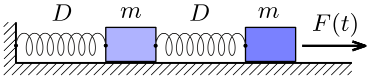
Feladatok órai munkára

F1. Egy L hosszúságú, M tömegű vékony rudat a két végénél két egyforma, D rugóállandójú rugó tart. Egyensúlyban a rugók hossza L. Függőlegesen lefelé irányuló F erővel a rúd bal végét a rugók hosszánál jóval kisebb d távolsággal kimozdítjuk az egyensúlyi helyzetből. Írjuk le a rúd végeinek mozgását az F erő megszüntetése után! A rugók tömege elhanyagolható.



F2. Egy D rugóállandújú rugó P felfüggesztési pontja az $x_P(t) = x_0 \cos\omega t$ függvény szerint mozog. A rugóra függesztett m tömegű test súrlódó közegbe nyúlik, ezért $-\gamma\dot{x}$ Stokes-féle fékezőerő hat rá. Mekkora a test stacionárius rezgéseinek amplitúdója?

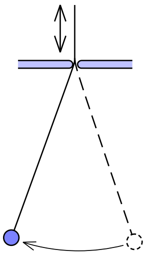
F3. Az *ábrán* látható rendszerben a súrlódás és közegellenállás elhanyagolható. A jobb oldali testet $F(t) = F_0 \sin\omega t$ időfüggésű gerjesztőerővel régóta rezgetjük.



a) Mekkora frekvenciákon rezonáns a rendszer?

b) Hogyan mozognak a testek $\omega = \sqrt{D/m}$, illetve $\omega = \sqrt{2D/m}$ gerjesztési frekvencián?

F4. Egy L hosszúságú fonálinga a mennyezetről lóg le, és a fonala egy lyukon keresztül felmegy a padlásra. Ott valaki a kezével tartja és a következő szabály szerint huzogatja a fonál végét: amikor az inga bármelyik szélső helyzetben van, az inga hosszát hirtelen $(1+\varepsilon)L$-re növeli, míg az egyensúlyi helyzetben a fonalat hirtelen visszahúzza L hosszúságúra ($\varepsilon \ll 1$).



Kezdetben az inga Φ_0 szögamplitúdóval leng. Mennyi idő alatt növekszik a lengés szögamplitúdója az e-szeresére? (Ez az ún. paraméteres rezonanciára példa.)

F5. Egy D rugóállandójú csavarrugóra akasztott m tömegű test kezdetben nyugalomban van. A $t = 0$ időpillanatban függőleges irányú, $F(t) = F_0 \cos\omega_0 t$ erő kezd rá hatni, ahol $\omega_0 = \sqrt{D/m}$. Mutassuk meg, hogy a test olyan rezgésbe kezd, melynek amplitúdója időben lineárisan növekszik!

Házi feladatok

H1. Egy $m = 10$ kg tömegű pontszerű test egy egyenes mentén csillapított harmonikus rezgőmozgást végez. A környező közeg ellenállása a test sebességével arányos. Határozzuk meg a T rezgésidőt, ha az amplitúdó három teljes lengés után tizedére csökken! (A rugóállandó $D = 20$ N/m.)

H2. Egy kényszerrezgést végző test amplitúdója ugyanakkora $\omega_1 = 400$ s^{-1} és $\omega_2 = 600$ s^{-1} körfrekvenciájú gerjesztőerő esetén (az erő amplitúdója a két esetben megegyezik). Mekkora a rezonanciafrekvencia?

H3. Egy D rugóállandójú rugóra függesztett, m tömegű test kezdetben nyugalomban van. A testet a $t = 0$ időpillanatban függőlegesen lefelé irányuló, mv_0 nagyságú, pillanatszerű erőlökésekkel lökdösni kezdjük, melyek τ időközönként követik egymást. Ábrázoljuk a test egyensúlyi helyzettől mért kitérését az idő függvényében

a) ha $\tau = \pi/\omega_0$;

b) ha $\tau = \pi/(2\omega_0)$, ahol $\omega_0 = \sqrt{D/m}$!

H4. Egy magas épület legalsó szintjén álló lift mennyezetéhez D rugóállandójú van erősítve, rajta egy m tömegű test függ. Egyszercsak a lift felfelé elindul állandó a gyorsulással, majd τ idő múlva gyorsulása ismét nullára változik, ezután a lift állandó sebességgel halad tovább. Mekkora amplitúdóval rezeg ekkor a test? (A csillapítást hanyagoljuk el!)

H5. Egy rugóra függesztett testre az $F(t) = F_0 \cos\omega t$ időfüggésű, függőleges irányú gerjesztőerő hat. A test kitérése ennek hatására $x = A\cos(\omega t - \varphi)$ módon változik az idő függvényében. Határozzuk meg a gerjesztőerő munkavégzését a rezgés egy periódusára vonatkoztatva!

H6. Csillapított lineáris harmonikus oszcillátort kényszerrezgésbe hozunk. A mozgás folyamán lesz olyan időpont, amikor az oszcillátor sebessége a legnagyobb. Ha megváltoztatjuk a gerjesztőerő frekvenciáját, megváltozik a legnagyobb sebesség értéke is. Hogyan válasszuk meg a kényszerrezgés frekvenciáját, hogy ez a legnagyobb sebesség maximális legyen (sebességrezonancia)?

H7. Egy csillapított, kényszerrezgést végző rendszer jósági tényezőjét a következőképpen definiáljuk:

$$Q = 2\pi \frac{\text{a rendszer által tárolt energia}}{\text{egy periódus alatt disszipált energia}}$$

Hogyan függ a jósági tényező a kényszerítő erő ω frekvenciájától? (A sajátfrekvencia ω_0, a csillapítási tényező β.)

H8. Egy m tömegű, pontszerű test csillapítatlan rezgőmozgást végezhet az x tengely mentén ω_0 körfrekvenciával. A test kezdetben az origóban, egyensúlyi helyzetben van, sebessége nulla. A $t = 0$ időpillanatban $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ gerjesztőerőt kapcsolunk be. Adjuk meg a test $x(t)$ kitérését az idő függvényében!

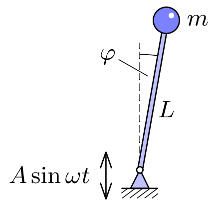
Útmutatás: A kitérés-idő függvényt keressük $x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{i}(t)$ alakban, ahol $x_\mathrm{h}(t)$ a homogén (gerjesztés nélküli) differenciálegyenlet ω_0 frekvenciájú megoldása, $x_\mathrm{i}(t)$ pedig a gerjesztőerő (inhomogén) járulékának megfelelő, ω frekvenciájú partikuláris megoldás.

H9. Oldjuk meg az előző feladatot, ha a gerjesztőerő időfüggése

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ F_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}, & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

Útmutatás: a mozgásegyenlet $x_i(t)$ inhomogén megoldása arányos $\mathrm{e}^{-\alpha t}$-vel.

H10. Egy L hosszúságú, súlytalan rúd végén m tömegű, pontszerű test helyezkedik el. Ha a rudat alsó végénél tengelyezzük, és függőlegesre állítjuk, akkor az instabil egyensúlyi helyzetéből eldől. Ha azonban a tengelyt függőleges irányban $A \sin \omega t$ időfüggés szerint rezgetjük, akkor megfelelő ω frekvencia és $A \ll L$ amplitúdó esetén a rúd függőleges helyzete stabil maradhat (Kapica-inga).



a) Írjunk fel egy egyenletet, amely leírja az inga φ kitérésének időbeli változását a felfüggesztési ponthoz rögzített (gyorsuló) koordináta-rendszerben!

b) Tegyük fel, hogy az inga $\varphi(t)$ szögkitérésének időfüggése két részre bontható: egy gyorsan oszcilláló részre és egy lassan változó, nem oszcilláló részre, azaz

$$\varphi(t) = \alpha(t) \sin \omega t + \beta(t)\,,$$

ahol $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ sokkal lassabban változó függvények, mint sin ωt. Ezt a próbamegoldást az *a*) részben kapott mozgásegyenletbe helyettesítve, majd a $g \ll A\omega^2 \ll L\omega^2$ közelítéseket alkalmazva fejezzük ki $\alpha(t)$-t $\beta(t)$, A, ω és g segítségével!

c) Az eddigi közelítéseket alkalmazva írjunk fel egy egyenletet $\beta(t)$ időbeli változására, majd g, L és A segítségével adjuk meg, legalább mekkora ω körfrekvencia szükséges a rúd felső helyzetének stabilizálásához!