Kísérleti fizika 1.
Kiegészítések az előadáshoz – 2020. november 26.

Az elmúlt órán a hullámok kinematikai leírásáról volt szó, a mai alkalommal a hullámok *dinamikai és energetikai* leírásával folytatjuk. Itt azonban meglehetősen nagy különbségek vannak a különböző közegben terjedő hullámok között. Néhány kiválasztott esetet fogunk megvizsgálni, és a végén ki fog derülni, hogy a különbségek ellenére mégis sok hasonlóság van a különböző esetek között.

Az első esetben egy rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullámot fogunk vizsgálni. A rúd egy kicsiny darabjára írjuk fel Newton II. törvényét: a kiválasztott darabra a hullám hatására deformált rúdban fellépő rugalmas erők hatnak. Ilyen módon egy lineáris, másodfokú, parciális differenciál-egyenletre jutunk:

$$\frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}\,,$$

ahol E a rúd Young-modulusa és ϱ a sűrűsége. A részletes levezetés a jegyzet 10.2 fejezetében található.

Ezt a differenciálegyenlet *hullámegyenlet*nek nevezzük (a rugalmas rúdra vonatkozó hullámegyenlet). A differenciálegyenletnek a peremfeltételektől függően nagyon sokféle megoldása lehet. (Itt nem csak *kezdeti* feltételekről beszélünk, hiszen térbeli *perem*feltételek is vannak, pl. mi van a rúd végeinél.) Megvizsgálhatjuk, hogy kielégíti-e az egyenletet egy (pozitív vagy negatív irányban haladó) egydimenziós haladóhullám hullámfüggvénye: $\Psi(x,t) = A\cos(\omega t \mp kx + \alpha)$. A behelyettesítés után (lásd a 10.2 fejezet második felét) azt látjuk, hogy igen, amennyiben $\frac{E}{\varrho} = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2$, azaz $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$.

A rúd paraméterei (E és ϱ) eszerint egyértelműen meghatározzák a rúdban haladó longitudinális hullám c sebességét. (A, ω vagy k és α értéke a kezdeti feltételektől függ, de ω és k nem választható egymástól függetlenül, hiszen $\frac{\omega}{k} = c$ adott.)

Ezt felhasználva a hullámegyenlet

$$c^2\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakban is felírható (ahol a mi esetünkben $c^2 = \frac{E}{\varrho}$).

Ezután vizsgáljuk a rúdban haladó hullám által szállított energiát!

A Φ energiaáram-erősség a rúd egy keresztmetszetén időegységenként áthaladó energia, mértékegysége watt. Az $\mathbf{I}$ energiaáram-sűrűség, vagy intenzitás az egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló energia, mértékegysége $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$, amely az energiaterjedés irányát is kifejezi, így vektoriális mennyiség.

Emlékezzenek vissza a térfogat- és tömegáram-erősségre, vagy az (elektromos töltés)áramerősségre, illetve a térfogatáram-sűrűség, tömegáram-sűrűség és (elektromos töltés)áramsűrűség fogalmára! Ahogy a tömegáram-sűrűséget a (tömeg)sűrűség és az áramló folyadék sebességének szorzata adja meg, ugyanígy az intenzitást (energiaáram-sűrűséget) az energiasűrűség és a hullám fázissebességének szorzataként számíthatjuk.

A rúdban egyrészt a rezgő tömegpontok mozgási energiája, másrészt a rugalmas energia terjed tovább a hullámmal. A 10.2.1 fejezetben végigszámoljuk, hogy egy harmonikus haladóhullám esetén mekkora a mozgási és rugalmas energia sűrűsége a hely és az idő függvényében. Vegyük észre, hogy a két energiasűrűség tag egyforma, és itt – ellentétben a rezgésekkel – ugyanakkor és ugyanott maximális az értékük!

Ez alapján már meghatározható egy adott felületen áthaladó energiasűrűség időátlaga és így az intenzitás is. Számunkra a végeredményből az a legfontosabb, hogy az intenzitás az amplitúdó négyzetével arányos: $I \sim A^2$.

Az energiaviszonyok ismeretében leírhatjuk a gömbhullámok viselkedését is (10.2.1 fejezet legvége). Olvassák el!

Ezután két másik közegben vizsgáljuk meg a hullám terjedésének dinamikáját: egy levegőoszlopban (longitudinális hullám) és egy kifeszített húrban (transzverzális hullám). Ezeket a levezetéseket a 10.6 fejezetben találjuk – érdemes alaposan tanulmányozni, mert a vizsgán tudni kell. A gáz esetében hasonlít a rugalmas rúdra – csak itt a deformáció és a nyomás közti összefüggést az adiabatikus gáztörvényből vezetjük le –, a húrnál egy kicsit más a helyzet, hiszen itt a húrra merőleges irányban írjuk fel a Newton II. törvényt.

Számunkra a legérdekesebb a két végeredmény, a két hullámegyenlet:

$$\frac{\kappa p}{\varrho}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2},$$

illetve

$$\frac{T}{\varrho S}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}.$$

Mindkettő ugyanolyan alakú, mint a rugalmas rúd esetében, csak a bal oldalon más, a közeg paramétereitől, a hullám jellegétől függő állandó áll. Ezeknek a hullámegyenleteknek nyilván ugyanúgy megoldása a harmonikus haladóhullám, így ezek az egyenletek is írhatók

$$c^2\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakban. Ezért ezt a differenciálegyenletet *egydimenziós hullámegyenlet*nek nevezzük, bármely egydimenziós közegre igaz (amennyiben a hullámot leíró egyenletek lineárisak). 10.6.1 fejezet.

Háromdimenziós esetben hasonló levezetésekkel megkaphatnánk a *háromdimenziós hullámegyenletet* is: ez csak annyiban különbözik, hogy a bal oldalon megjelennek az y és z szerinti parciális deriváltak is:

$$c^2\left[\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}.$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés hasonlít arra, amit a gradiensnél láttunk (de ott első parciális deriváltak voltak, és meg voltak szorozva a megfelelő egységvektorral), ennek a neve Laplace-operátor, jele Δ. Az idő szerinti deriválást szokás felül ponttal (a második deriváltat felül két ponttal) jelölni, és így a háromdimenziós hullámegyenlet a gyönyörű, tömör

$$c^2\Delta\Psi = \ddot{\Psi}$$

alakban is írható.

Ennek a nagyon rövid (négyváltozós, parciális) differenciálegyenletnek végtelen sok megoldása van a legkülönbözőbb peremfeltételeknek megfelelően.

Nem kötelező tananyag (és így a vizsgán se kérdezem) az utolsó – középiskolás szintű, leegyszerűsített – levezetés, amelyben azt mutatom meg, hogy a vákuumban terjedő elektromágneses síkhullámok hullámegyenlete is ugyanolyan alakú, mint az általános egydimenziós hullámegyenlet. (10.6.1 fejezet második fele. Ezzel majd a KísFiz2-ben fognak behatóbban foglalkozni.)

Az elektromágneses hullámban az elektromos térerő és a mágneses indukció vektora egymásra és a terjedési irányra is merőlegesek (ezért az elektromágneses hullámok, és így a fény is, transzverzális hullám). A két tér között a Maxwell-egyenletek teremtenek kapcsolatot. Ezekből kiindulva az elektromos térerősség vektorra (ami most a hullámfüggvény) a

$$\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$$

hullámegyenletet kapjuk. (Ugyanezt kapnánk a mágneses indukcióra is.)

Ebből az is következik, hogy az elektromágneses hullámok sebessége vákuumban (azaz a vákuumbeli fénysebesség) $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}$.

Jó tanulást! Akinek kérdése van, írjon!

Vankó Péter